EL FACTOR "PARADOJAS" Y EL FACTOR "GODEL" EN LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMATICA

Ángel Ruiz
www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz

Referencia: año 1985. Ciencia y Tecnología, Volumen IX, No 1 Y 2, Editorial Universidad de Costa Rica.

Resumen

En este trabajo se busca hacer una descripción analítica del formalismo y el intuicionismo como filosofías de la Matemática centrales en los Fundamentos de las Matemáticas. Se establece entonces una crítica filosófica de los supuestos teóricos presentes en ellas. La incursión intelectual incide en la "Crisis de los Fundamentos" en conexión particular con los resultados gödelianos en la década de los treinta. Se concluye, a partir del vínculo esencial entre estas filosofías y el racionalismo, una crítica profunda no solo a un paradigma formal— axiomatizante sino a uno racionalista sobre la naturaleza de las matemáticas. Se concluye el agotamiento de cierta filosofía de las matemáticas y se hace un llamado intelectual para la obtención de nuevos criterios teóricos en busca de una nueva interpretación sobre las matemáticas.

Abstract

(The "paradoxes" factor and the "Gödel" factor in the Foundations of Mathematics).
In this article we deal with an analytical description of Formalism and Intuicionism as central philosophies of Mathematics. A philosophical critique of the theoretical assumptions in them is then established. The intellectual approach gets into the "Foundations crisis" connected particularly with the Gödelian results of the thirties. It is concluded, from the essential link between these philosophies and Rationalism, an acute critique not only of a formal—axiomatic paradigm but of a rationalist one about the nature of Mathematics. It is concluded the exhaustion of a certain kind of Philosophy of Mathematics, and an intellectual call is made searching for new theoretical criteria, seeking for a new interpretation about Mathematics.

El problema de los fundamentos de la matemática no puede verse simplemente como aquél cuyos determinantes giran en torno a las paradojas y contradicciones de finales del pasado siglo y principios de éste. Como señala Max Black el análisis filosófico debe exhibir la estructura de la matemática, tanto hacia su interior como hacia su relación con otros conocimientos no matemáticos[1]. Sin embargo, históricamente los trabajos de fundamentación se pueden distinguir por lo menos en dos etapas, antes y después de las paradojas. Antes, de lo que se trataba era de la búsqueda del rigor, la precisión, y las condiciones de validez de un cuerpo teórico que cada vez más apelaba a la lógica como criterio. Los trabajos de Dedekind, Weierstrass y los de Frege, estaban orientados por los requerimientos de una "nueva matemática" que ya no podía ser aprehendida, por lo menos de una manera tan evidente, por su relación con la predicción y el mundo físico. En Frege se conjugó no sólo la búsqueda del rigor, sino, sobre todo, la solidez lógica que éste entendía como propiedad intrínseca de las matemáticas. Después, la preocupación se centró en lo que aparecía como un duro golpe al edificio sólido e inconmovible que con los trabajos de rigorización y fundamento anteriores se exhibía seguro a los cuatro vientos. Las paradojas fueron la señal de que había grietas en el edificio. Los esfuerzos se iban a dedicar entonces a dar cuenta sobre todo de la consistencia amenazada. Esto va a ser el motor de la etapa fundamental de los llamados fundamentos de la matemática.

El factor "paradojas" no era un enemigo despreciable; no sólo era visto como un problema parcial ligado a una temática apenas particular del conocimiento, sino que, amenazando la consistencia de las matemáticas, ponía en jaque el modelo más apreciado de la ciencia occidental. El esquema de un cuerpo teórico euclidiano que inyecta la infalible verdad a priori desde la cúspide hasta la base, era el prototipo de la visión racionalista, que había dominado durante tantos años. Eso le daba la importancia al "problema" de los fundamentos de la matemática. Lo que estaba en juego conectaba con las concepciones filosóficas que habían determina- do la esencia de las matemáticas en la generación de verdades infalibles, en lo absoluto de la deducción y en los aspectos formales y más abstractos de la misma. El "problema" se refería no sólo a las necesidades internas al desarrollo práctico, a las orientaciones teóricas de las matemáticas, sino, también a las externas de la reflexión sobre la misma. Esta situación hizo posible la conexión entre filosofía y matemática de una forma tremendamente estrecha. En esta segunda etapa se comprende mejor el significado del logicismo de Brouwer. Se trata también de explicar las limitaciones principales que los estudios fundacionales han manifestado sobre la comprensión formal de la naturaleza de las matemáticas.

La discusión entre intuicionismo, formalismo y logicismo se puede poner en relación con la vieja discusión de los universales[2]. Para Quien esto es posible porque:

> La matemática clásica, como ilustra claramente el ejemplo de los números primos mayores que un millón, está comprometida hasta el cuello en una ontología de entidades abstractas. Por ello la controversia medieval de los universales ha vuelto a encenderse en la moderna filosofía de las matemáticas[3].

Para éste (al igual que para S. Barker) es posible conectar el realismo de las entidades abstractas con el logicismo, el conceptualismo con el intuicionismo, y el nominalismo con un formalismo en el que concibe la matemática clásica como un juego de notaciones no significantes"[4]. Sin embargo no todos están de acuerdo con esta interpretación. Para Ladrière es posible detectar dos grandes actitudes en los fundamentos. Por un lado la platonista, que enfatiza la existencia independiente de las entidades matemáticas; y otra empírica, que las considera un resultado de la construcción. Ladrière se inclina por pensar que: "La primera actitud es la de Hilbert y los axiomáticos; la segunda, la de Brouwer y los logicistas"[5]. Es difícil pensar que los logicistas se colocan como dice Ladrière.

En el logicismo existe una reiterada actitud de sostén de la existencia de entidades abstractas, actitud que incluso es fuente de los problemas de esta corriente en los fundamentos. La división de Quine (y otros) no es, sin embargo, suficientemente adecuada para englobar la visión filosófica particular de Hilbert, que, como veremos, se adhiere a la primera actitud que señala Ladrière, y para el cual el formalismo es un instrumento que busca evidenciar — demostrar una consistencia que es inherente a las matemáticas.

La actitud intuicionista es un rechazo a admitir la existencia de entidades abstractas separadas de la constructibilidad (definida en sus términos). La verdad y la existencia matemáticas están entonces en dependencia de la exhibición de pruebas constructivistas. Este punto de partida implica una gigantesca transformación del análisis y la lógica clásicos. Señala Ladrière:

> La exigencia de constructibilidad le lleva a rechazar toda consideración de un infinito actual y a admitir solamente el infinito potencial (...). Desde el punto de vista lógico, esta exigencia se traduce en el rechazo de la "exclusión del tercero" (para los conjuntos infinitos).
> No se puede afirmar "a priori" que la solución de un problema matemático deba ser del tipo A o del tipo no A, mientras no se haya establecido un procedimiento efectivo que permita obtener esta solución[6].

Estas premisas que usa el intuicionismo conducen a sacrificar una buena parte de la matemática clásica. Esta consecuencia bastante desagradable lo hacía poco atractivo para la mayoría de matemáticos, para aquellos incluso que eran conscientes del carácter insatisfactorio del logicismo. Hilbert va a intentar un camino intermedio que sin abandonar el análisis clásico apunte a la consistencia.

I

La primera observación general necesaria de hacer sobre las ideas de Hilbert es que parte de Kant. La matemática no es reducible a nociones y principios lógicos, sino que posee objetos que describe. Hilbert plantea las cosas así:

> …algo que se presupone al proceder a inferencias lógicas y en la ejecución de operaciones lógicas está ya dado en la representación (Vorstellung), esto es, ciertos objetos concretos extralógicos, que están intuitivamente presentes en forma de experiencia inmediata y se hayan en la base de todo pensamiento.
> Si el pensamiento lógico ha de estar seguro, estos objetos han de ser susceptibles de examinarse a fondo, en sus componentes, y la exhibición, la distinción, el orden de sus partes y la disposición de éstos en el espacio, han de estar dados en los objetos mismos, como algo que no puede reducirse a nada más ni necesita por lo demás en modo alguno semejante reducción[7].

Se trata evidentemente de una referencia a objetos no lógicos, al igual que en Kant aparecen ligados a la percepción interior "en forma de experiencia inmediata y se hallan en la base de todo pensamiento". Hilbert apela a una intuición interior, a una evidencia no lógica en las matemáticas. Ahora bien, mientras que para Kant esta evidencia residía en la intuición mental a priori del espacio y el tiempo, en Hilbert las cosas son más simples. Se trata de la intuición del signo. Dice en 1922:

> Para mí — y en esto me opongo totalmente a Frege y a Dedekind — los objetos de la teoría de números son los signos mismos, de los cuales podemos reconocer la forma en todas sus generalidades y con toda seguridad,

> independientemente de las circunstancias de lugar y de tiempo, de las condiciones particulares de su presentación y de Las diferencias insignificantes que pueden afectar a su trazado. El punto de vista filosófico sólido que considero como indispensable para el fundamento de las matemáticas puras — como para cualquier tipo de pensamiento, de comprensión y de comunicación científicos — se puede resumir de esta forma: en el principio — y así nos expresaremos aquí — era el signo[8].

Para Hilbert el fracaso del logicismo es el fracaso de los intentos por eliminar las intuiciones y las evidencias previas a los procesos lógicos. No se trata de eliminarlos, se trata de explicar en concreto cuáles son y cómo actúan. Ahora bien, la exhibición de estos objetos concretos, para Hilbert, es la base de la posibilidad de la consistencia de la matemática. Porque, señala Körner:

> Si la matemática ha de restringirse — por completo y sin calificación — a la descripción de objetos concretos de cierta clase y a las relaciones lógicas entre tales descripciones, entonces, ninguna contradicción puede producirse en ella, ya que las descripciones precisas de objetos concretos son siempre mutuamente compatibles[9].

Con esta filosofía es entonces posible trazar un programa para intentar garantizar la coherencia lógica de las matemáticas.

Hilbert afirma que la matemática no se puede reducir a la lógica, que otros axiomas y principios no lógicos deben añadirse. En ese sentido aunque parte del tratamiento axiomático — formal del logicismo, no está preocupado por las condiciones que imponen un reduccionismo logicista. La presencia de axiomas extra—lógicos no son fuentes de problemas en su filosofía. Más aún, para él la presencia de nociones y elementos "ideales" que no representan percepciones intuitivas no es contradictorio con la consistencia de la matemática, para lo cual se basa en la tradición clásica de las matemáticas (irracionales, complejos, etc.). Es importante para Hilbert la simbolización de todas las nociones. Las proposiciones son combinaciones o cadenas de símbolos. Para Hilbert las nociones de las matemáticas son entonces de un contenido perceptible, no perceptibles o "ideales". El busca la fusión de ambas y las introduce en un programa que pretende probar la consistencia del cuerpo teórico así construido. Para lograr esos efectos se requiere entonces hacer una diferenciación de niveles: por un lado, la teoría propiamente, que él la expresa con números—trazos y las operaciones entre ellos; y, por el otro, una metateoria, que está compuesta por las fórmulas que corresponden a los trazos y sus proposiciones y a las reglas formales que corresponden a las de la teoría. Una teoría de la aritmética se refiere entonces a la construcción de resultados con los trazos, mientras que la que se refiere a la construcción de fórmulas se flama metateoria. Una vez construido un sistema formal (de fórmulas) a partir de una teoría el proyecto parte de la siguiente hipótesis: la consistencia lógica de la teoría es equivalente a la consistencia formal del sistema formal.

Los sistemas formales son la pieza de toque de Hilbert en la búsqueda de demostración de la consistencia de la matemática. Ahora bien: en el formalismo existen dos orientaciones aparentemente encontradas, Para Hilbert como hemos dicho, el formalismo es un medio; pero, para otros, es un fin. Para Curry, por ejemplo, la matemática es la "ciencia de los sistemas formales[10]". En el formalismo a ultranza hay una transmutación del objetivo de la construcción matemática. Este aquí es la fundamentación en sí; no se establecen realmente diferencias entre la teoría y la metateoría, todo es parte de lo mismo. Describe Ladrière de una manera muy acertada esta última posición:

> Construir las matemáticas no es retrotraer los conceptos matemáticos a conceptos más fundamentales, extramatemáticos, sino practicar el análisis de tales conceptos con tal precisión que en adelante su significado quede definido sin ambigüedad. El verdadero trabajo de fundamentación es pues un trabajo de purificación, y su herramienta es el formalismo. Gracias a él se puede reducir la parte de intuición a una suerte de mínimo absoluto: descifrar determinadas configuraciones de símbolos[11].

Para Körner la visión radical está más cercana a "la doctrina de Kant en la Estética Trascendental"[12], que la posición de Hilbert; puesto que en ambos las proposiciones de la matemática poseen construcciones para su objeto, aunque en Kant limitadas por las intuiciones, y en los formalistas por los límites dentro de los cuales la percepción es posible". O visto de otra forma: "... los enunciados a propósito de las construcciones matemáticas son enunciados empíricos que entrañan el menor riesgo posible de error"[13]. Pero, sigamos adelante. Para Hilbert el objeto de la matemática estaba en los trazos y sus relaciones; para Curry en las fórmulas, los símbolos de éstas y sus reglas. La actitud metodológica es, sin embargo, la misma. No se trata de buscar el objeto de la matemática en la realidad material en sí, en ese devenir que fluye independientemente de nosotros, pero que, de diversas formas, y, a partir de nuestros límites, aprehendemos por la vía del pensamiento. En el formalismo el objeto es los trazos o las fórmulas. En aras de demostrar una premisa, la posibilidad de la prueba de consistencia, se busca una conexión artificial, inadecuada, con la realidad. Esta actitud metodológica borra de un plumazo la existencia real de la matemática, elimina los objetos reales de la misma; no por la vía de la negación sino por la de la sustitución. ¿Cuál es la justificación de esta aproximación? Pareciera que la única que brindan los formalistas es que así, con los trazos, símbolos o fórmulas, percibimos un objeto perfectamente determinado; así el análisis es supuestamente más concreto y real. Ya no se trata de juicios sintéticos a priori solamente, sino, incluso, ¡hasta a posteriori! El método es erróneo. Confunde la simbolización y manejo de objetos visibles con la matemática propiamente. La matemática tiene como objetos partes de lo real determinadas por una relación material sujeto—objeto. Las simbolizaciones son representaciones visuales de las abstracciones hechas por la conciencia de los hombres. Las operaciones de símbolos o trazos matemáticos están determinadas por el objeto de la matemática, por las condiciones más generales de su naturaleza. Cuando hablamos de los símbolos 1,2,3, etc. (numerales) estamos refiriéndonos a representaciones útiles de conceptos y abstracciones. Los números no son esos numerales, como tampoco otra representación (1, 11, 111, 1111, etc.).

Un conjunto de trazos y símbolos en el mejor de los casos se puede ver, una vez estructurado, como un "modelo" de lo que es la aritmética. Este modelo puede ser conveniente o no dependiendo de muchos factores, Puede ser útil puesto que estando en una correspondencia con las nociones matemáticas. Es posible obtener resultados, a partir de un desenvolvimiento con reglas precisas que están en correspondencia también con ellas. Un sistema formal no es sólo la representación de una teoría, sino una ulterior abstracción de ella. Por más precisión y "concretización" de las reglas y objetos que intervienen en un sistema formal, éstos no pasan de ser más que una representación con además una abstracción adicional de por medio. En cuanto tales no pueden asimilarse los sistemas formales a la categoría de razgo distintivo definitorio de las matemáticas. Esto sería vaciar a la matemática de su verdadero contenido.

> Hermann Weyl en Philosophy of mathematics and natural Science nos dice:
> La matemática de Hilbert puede ser un bonito juego con fórmulas, más entretenido incluso que el ajedrez; pero, ¿qué acción tiene sobre la cognición, cuando sus fórmulas admitidamente no tienen un sentido material por virtud del cual ellas pueden expresar verdades intuitivas?[14].

Para Weyl (como para el Russell de la segunda edición de los Principios) la matemática se refiere al mundo y, más aún, debe estar al servicio de las ciencias naturales. La pretensión formalista es que:

"La concepción formalista de las matemáticas está entonces libre de prejuicios metafísicos y es compatible entonces con prácticamente cualquier tipo de filosofía"[15]. Sin embargo, el costo de lo que apenas llega a un supuesto es una matemática vaciada de su contenido auténtico.

En otro orden de cosas, es erróneo suponer que la visión del formalismo extremo está más cerca de Kant. No se puede asimilar lo que Kant entendía como objeto y construcción matemática, que estaba conectado a una intuición espacio—temporal, aunque fuese de fuente subjetiva para él, con las fórmulas y los trazos de los formalistas. La coincidencia con Kant se encuentra en el reclamo de presentación de objetos en la construcción matemática; los objetos que exhiben formalistas moderados o radicales traicionan el espíritu Kantiano. En este terreno, quién está más cerca de Kant, Hilbert o Curry, es intrascendente (pero, en todo caso, no parece ser que lo esté la visión más abstracta y alejada de la verdadera matemática).

Es posible ahora hacer algunas observaciones: el formalismo representa una vuelta a Kant, en tanto afirma la no analiticidad de las matemáticas y busca darle un objeto a estas aprehensible por la intuición. Sin embargo, el carácter sintético de éstas no se busca en la realidad exterior independiente al sujeto, sino en un producto del sujeto que representa abstracciones: los signos. Con esta actitud el formalismo no lleva las matemáticas a la realidad del mundo, sino que, creando un estrato intermedio, se separa de él. Sale entonces de "una matemática que, en su mejor comprensión, no dice nada sobre el mundo" (analítica), a una matemática también desconectada de la realidad, aunque no del mundo semiótico. No llega al empirismo clásico. Pero no solamente hace eso, afirma también el carácter formal de la matemática. No se reduce la matemática a la lógica o a las leyes del pensamiento, sino que a la manipulación de símbolos en menor o mayor grado de abstracción; no sobre la base de ciertos criterios o sentido de la realidad (como en "cierto" Russell) sino a la larga sobre decisiones convencionales. El sentido fundamental de lo que apuntaba el formalismo es nuevamente, a pesar de todos los objetos exhibidos, una matemática sin contenido, que tampoco dice nada sobre lo real. El camino inevitable a partir de las principales premisas formalistas es el de afirmar el convencionalismo en la naturaleza de las matemáticas y, si existe evidencia, ésta sólo puede terminar siendo sintáctica. La matemática es un lenguaje simbólico (o varios) en donde podemos escoger sus reglas con base en nuestras conveniencias más diversas. El formalismo rompe con el logicismo, habla de intuición y de objetos de la matemática; crea la ilusión de que se escapa por la puerta del paradigma racionalista y formal clásico de las matemáticas, pero vuelve al mismo, regresa por la ventana y, además, lo reafirma en toda su extensión. Es poco útil desde un punto de vista filosófico riguroso que después de definir a la matemática como la "ciencia de los sistemas formales" y se le vacíe de su contenido material verdadero, luego se diga que la escogencia y aplicación de estos sistemas reside en lo "empírico"[16]. Lo que epistemológica y filosóficamente es importante es el establecimiento de la conexión entre las nociones y conceptos de la matemática con la realidad material. Es poco adecuado decir que la matemática debe estar libre de asunciones metafísicas[17], cuando, primeramente, es una asunción metafísica exhibir como sus objetos trazos o fórmulas; y, en segundo lugar, cuando de hecho esta posición es la manifestación de una impotencia para aprehender la naturaleza de las matemáticas.

II

Para el intuicionismo las cosas son bien diferentes al formalismo. La matemática en él no es referida a un objeto exterior. Dice Heyting en Intuicionism, An Introduction: "La característica del pensamiento matemático es que no transmite verdad acerca del mundo externo, sino que concierne sólo con construcciones mentales"[18].

El programa de Brower consistía en: "la investigación de la construcción mental matemática como tal, sin referencia a preguntas acerca de la naturaleza de los objetos construidos, como si estos objetos existen independientemente de nuestro conocimiento de ellos" [19].

El objetivo de los intuicionistas no son los aspectos formales de la matemática, sino el "tipo de razonamiento que aparece en la matemática"[20]. Es decir, se refiere a procesos constructivistas. Esto es muy importante de enfatizar: "....el intuicionismo procede independientemente de la formalización, la cual sólo puede seguir después de la construcción matemática"[21]

Con lo anterior se separa de la concepción que enfatiza la estructura formal de la matemática: el sustrato del formalismo (ya presente en el logicismo). Pero además se separa del logicismo radicalmente: "…la lógica es parte de las matemáticas y no puede de ninguna manera servir como un fundamento de ella"[22].

No se trata entonces tanto de un proyecto de fundamentación en términos de la consistencia de las matemáticas, se trata de una manera de hacer matemáticas: "Es más un fenómeno de la vida, una actividad natural del hombre abierta al estudio por métodos científicos"[23].

El intuicionismo parte de la noción de número natural:

> En la percepción de un objeto concebimos la noción de una entidad por un proceso de abstracción de cualidades particulares del objeto. También reconocemos la posibilidad de una repetición indefinida de la concepción de entidades. En estas nociones descansa la fuente del concepto de números naturales[24].

Lo que importa en el intuicionismo no es ni lo formal, ni lo deductivo, ni lo axiomático, sino la evidencia intuitiva. Es un rechazo de ciertos aspectos del paradigma racionalista y formal clásico. Podríamos conectar con esta actitud hacia las matemáticas a muchos pensadores que van desde Descartes y Pascal (en parte), Krönecker, Poincaré, Borel, Lebesque y Baire. Es sin embargo Brower quien fundó esta filosofía en los tiempos modernos. Desde el punto de vista filosófico buscó una alternativa al paradigma basado en la evidencia lógica y formal, a partir de una vuelta también a Kant. La matemática para el intuicionismo tampoco es analítica, es sintética; pero no se preocupa, a diferencia de Hilbert, de exhibir un objeto sensible o no para la matemática.

Para Brouwer la matemática es sintética sobre todo en el sentido de que no se derive tautológica- mente, que produce un contenido cognoscitivamente nuevo. Las proposiciones de la matemática aparecen como el producto de una construcción en la intuición temporal Mientras que para Kant lo que establece las proposiciones de la matemática es la estructura mental de lo espacio-temporal, en Brouwer sólo lo temporal es retomado. Es el movimiento que en la mente hace pasar de 1 a 2 lo que determina a las matemáticas. Es esto lo que le da su carácter no analítico[25].

La matemática para los intuicionistas no se puede asimilar ni al lenguaje ni a la lógica (un duro golpe en su visión a la "evidencia" sintáctica). El lenguaje y la lógica son sobre todo instrumentos necesarios exclusivamente en la transmisión y comunicación, no en la construcción matemática. Para esta última lo único que prevalece es una intuición interior, una autoevidencia. No se busca la estructura de la construcción matemática hacia afuera, sino hacia adentro en una inspección directa. Para Brouwer ésta es la filosofía de la matemática. Las paradojas y demás problemas que atormentan a los logicistas y formalistas, tienen su origen en los abusos y extralimitaciones del lenguaje y de la lógica, cuando éstos han dejado de corresponder a la verdadera matemática.

No se trata para el intuicionismo de probar la consistencia de la matemática (como Hilbert) sino de hacer matemática verdadera, apegada a esa intuición introspectiva. Esta matemática así determinada filosóficamente establece, según Brouwer, un programa práctico centrado en la noción constructivista. Es esto lo que en el fondo determina las reglas usadas, a saber: el lenguaje y la lógica. Dependerá de ella también el tratamiento de las nociones infinitas. La verdad y la existencia matemática aparecen fundidos en la construcción.

En mi opinión es totalmente correcto señalar la futilidad formalista extrema de hacer de los sistemas formales la matemática, así como la demostración de la consistencia su tarea central. Es transmutar el objeto de la misma. Sin embargo, la fundamentación de la matemática es un problema real. No se puede evadir. Brouwer no se compromete a buscar caminos teóricos de fundamentación de la matemática existente. En su lugar pretende partir de cero, sacrificar gran parte de lo que existe y levantar una nueva matemática (con una amputación de las intuiciones Kantianas) haciendo de la intuición temporal el sustrato de su evidencia. Es correcto criticar el objeto formalista de la matemática de los trazos, símbolos y fórmulas, que es en realidad una escapatoria a abordar los problemas de la epistemología matemática que no podía resolver el logicismo. Las nociones y conceptos de la matemática son abstracciones, representables, en alguna medida, en el papel o donde sea, pero abstracciones. Sólo pueden ser aprehensibles por la mente. Son construcciones de la mente y están, por así decirlo, en una relación íntima con el sujeto. Pero estas abstracciones y construcciones no se hacen en el vacío de la mente. Aparecen en el seno de una relación mutuamente condicionante sujeto—objeto. Los objetos de la matemática aparecen aquí. El camino de la búsqueda de la naturaleza de la matemática no se dirija ni al sujeto en sí, ni al objeto en sí, sino a las determinaciones de esta relación y realidad. Pero además este camino está orientado vectorialmente (sobre todo) hacia afuera, hacia el objeto exterior y no al revés. Una teoría de la verdad en la matemática requiere establecer un programa preciso que evidencie la conexión de los elementos y enunciados y estructuras matemáticas con la realidad material. Así, pues, depositar los criterios de verdad en una intuición interior es una vuelta al subjetivismo estéril. No es raro entonces que en el intuicionismo subjetivista se prescinda del lenguaje y la lógica. El sujeto individual vive en sí y para sí la experiencia de la intuición interior, de la construcción mental de la matemática, alejado del lenguaje y la lógica. Se trata de un mundo de pensamientos, ideas, exclusivo, íntimo. Yo estoy totalmente de acuerdo en que la matemática ni es un lenguaje, ni es lógico. Precisamente afirmar la preeminencia en sí de estos últimos es parte de los paradigmas que hemos venido señalando. Creo además que es necesario establecer una diferenciación radical entre estas tres nociones. Pero no puedo aceptar la ausencia de una estrecha relación entre construcción matemática y lógica, entre la primera y el lenguaje; más aún, con una combinación adecuada de estos tres elementos y la realidad material debe tejerse una concepción filosófica sobre las matemáticas.

El lenguaje es el instrumento a través del cual viajan los razonamientos por la conciencia, pero, más que eso, es parte de esos razonamientos. La conciencia es lenguaje interiorizado. No es posible el pensamiento sin alguna forma de lenguaje, oral escrito, visual, etc. Este elemento en particular manifiesta un contenido social en los productos de la conciencia de los hombres. No es entonces el lenguaje mera necesidad de comunicación, es parte esencial de la construcción matemática. La subestimación de Brouwer, que tal vez se puede entender como reacción en un contexto histórico en el que las "mayorías" afirman un paradigma lógico o "lingüístico" expresa, sin embargo, un carácter extraordinariamente subjetivo.

Por otra parte, consideraciones similares se pueden hacer sobre la lógica. Esta no interviene en la matemática como compendio que constituye o al que se reduce esta. No es la mención de reglas tampoco lo que está presente, sino el uso de la lógica. No se reduce la matemática a ella, pero interviene decisivamente en la construcción matemática. Las reglas de la inferencia que se usan están integradas en la conciencia como producto de la relación de los hombres con la naturaleza y por razones hasta de contenido biológico. Es parte de la matemática aunque no es ni se reduce a ésta. Estas reglas intervienen en las matemáticas incluso cuando se introducen lógicas "polivalentes".

Al intuicionismo no le preocupa mucho que se lance por la borda una gran parte de las matemáticas clásicas:

> Sobre la mutilación de las matemáticas que usted me acusa, debe ser tomada como una consecuencia inevitable de nuestro punto de vista. Puede verse también como la escisión de ornamentos nocivos, bellos en su forma, pero huecos en substancia, y es al menos parcialmente compensado por el atractivo de agudas distinciones y métodos ingeniosos a través de los cuales los intuicionistas han enriquecido el pensamiento matemático[26].

Brouwer con una visión unilateral constructivista, con una sola bandera programática y con unas cuantas formulaciones filosóficas pretende reconstruir la matemática. Logra con la estrechez de su método reducir enormemente las posibilidades de la práctica matemática. No se puede reducir los métodos de la matemática a exclusivamente los constructivistas intuicionistas. Aparte del subjetivismo que eleva la intuición temporal a una categoría metafísica, sus métodos son insuficientes y limitados.

Existen más problemas con el intuicionismo. ¿Qué se entiende exactamente por constructivismo? ¿Hasta dónde se corta de la matemática clásica? Este es un problema que ha engendrado varios intuicionismos. Señala Kline:

> Algunos decidieron eliminar todas las nociones de la teoría de conjuntos y limitar ellas a conceptos que pueden ser definidos efectivamente o construidos. Menos extremistas son los constructivistas que no cuestionan la lógica clásica y más aún la usan toda. Algunos admiten una clase de objetos matemáticos y después insisten en procedimientos constructivos. Entonces hay muchos que admiten al menos una clase de números reales (la cual, sin embargo, no se extiende al continuo entero de tos números reales); otros admiten sólo los enteros y entonces toman en consideración sólo conceptos tal como números y funciones que son computables. Lo que es considerado computable también varía de un grupo a otro"[27].

Esta es una señal de la existencia de problemas en el sustrato filosófico del intuicionismo y en donde no puede estar ajeno su profundo carácter subjetivo.

Mientras que Hilbert—Curry toman de Kant la necesidad de exhibir un objeto en las matemáticas, Brouwer toma la intuición temporal a priori. Levantando la bandera del apriorismo Kantiano se coloca contra el paradigma de lo deductivo, axiomático y formal, que termina apuntalando lo lingüístico y lógico en la matemática al punto que ésta se desvanece en ellos. Pero el subjetivismo que enfatiza (de Kant) Po es suficiente para responder esto, Tampoco es suficiente el exclusivo método que escoge para dar cuenta de las matemáticas. Ofrece frente al paradigma del énfasis en lo formal y sintáctico, el énfasis en la intuición, en una sola intuición.

Los teoremas del intuicionismo plantean una dificultad evidente: ¿Cuál es la posibilidad de la intersubjetividad en situaciones que dependen del individuo? Si se admite esta intersubjetividad ¿cuáles son los criterios para revelarla? Las preguntas apuntan a las dificultades inherentes a toda interpretación del conocimiento o de la verdad basada en la evidencia interior. Como con el clásico cartesianismo cuya noción de evidencia se expresa en lo 'claro" y "distinto", la posibilidad de experiencias distintas y contradictorias sólo puede minar la noción de "autoevidencia". Precisamente Frege buscaba una respuesta a esto con su filosofía platonista. La condena de toda autoevidencia es su conducción ineludible a un subjetivismo radical, al solipsismo. La ausencia de criterios objetivos susceptibles de verificarse por la vía práctica condenan al intuicionismo a alienarse de las ciencias naturales. No es posible en el intuicionismo probar por la vía de la intuición la existencia de la intersubjetividad, base de cualquier conocimiento científico.

Por último, una crítica en su propio terreno: una gran parte de resultados intuicionistas están lejos de ser de los que aparecen evidentes o cercanos a la intuición (sea cual sea)[28]. Se puede añadir, además, que los resultados intuicionistas no han encontrado prácticamente posibilidades de aplicación en las ciencias (esto, de cualquier forma, no es significativo para su visión).

Las críticas al intuicionismo se han concentrado historicamente en el subjetivismo, como es natural. Esto los ha conducido a tratar de definir criterios más objetivos por la vía de formalizar la matemática intuicionista; pero esto es, como señala Körner, una declaratoria de admisión en el formalismo y el abandono de sus principios filosóficos básicos[29].

La vuelta a Kant por los formalistas y los intuicionistas es un auténtico fracaso desde el punto de vista filosófico. Los formalistas exhiben objetos inapropiados, transmutan el carácter de la matemática y, a pesar del reclamo Kantiano, apuntalan fuertemente al paradigma de lo deductivo y formal. Los intuicionistas, por otra parte, frente al logicismo y al formalismo (evidencia lógica y sintáctica) apuntalan la intuición subjetivista conjurada con el rechazo al platonismo y un obsesivo constructivismo. Vuelven a Kant en dos sentidos diferentes, pero con ello no contribuyen filosóficamente a abrir una ruta hacia una nueva interpretación alternativa y viable frente al paradigma formal.

El intuicionismo trató de escapar del paradigma de la evidencia lógica y formal, pero siguió participando del paradigma racionalista sobre las matemáticas, de las verdades infalibles y absolutas, de la mente generadora de conocimiento a priori. Intuicionistas y formalistas parten todos de la premisa de que el objeto o el fundamento de las matemáticas está separado del mundo material. Se enfatiza lenguaje, lógico o intuición en las matemáticas, pero nunca su contenido empírico.

En los años veintes las diferentes escuelas filosóficas en los fundamentos de la matemática sentían un futuro libre de las crisis teóricas del pasado. Las paradojas habían sido el último "desastre". El formalismo prometía, el constructivismo, estrecho y complejo, pero podía servir. El logicismo con los axiomas extralógicos no parecía recuperarse, pero la esperanza no se disipaba. La matemática seguía siendo un edificio inconmovible y las teorías de la verdad infalible aparecían triunfantes. El empirismo renunciaría en pocos años a reconocer a la matemática como algo más que lenguaje y reglas convencionales. La década de los treinta cambiaría esta visión optimista de manera abrupta y radical para todo aquel que lo quisiera ver. Daba inicio a una nueva era: la gödeliana.

III

En Los Elementos de Euclides se estableció una estructuración de los resultados matemáticos que se ha adoptado usualmente como el modelo axiomático. Se trata en éste de escoger unas cuantas nociones y enunciados a partir de los cuales, rigurosamente, deducir otros; es una encadenación precisa de los enunciados, que busca disminuir los elementos subjetivos o intuitivos en la expresión del razonamiento matemático. Ahora bien, un sistema formal no es una axiomática simplemente: es una abstracción mucho más grande a partir de lo axiomático. Mientras que en la axiomática es importante cuales axiomas primarios se escogen, en un sistema formal no, es relativo y determinado por convención o comodidad. Se puede presentar un sistema formal distinguiendo entre "ideas primitivas" y "teoremas primitivos" de la siguiente forma:

"1. Ideas primitivas:
a) Componentes primitivos
b) Operaciones

2. Teoremas primitivos:
a) Axiomas
b) Reglas"[30].

Se puede establecer una correspondencia entre una axiomática y un sistema formal:

> La noción de proposición (en el sistema formal) es análoga a la de enunciado (en la teoría intuitiva). La de derivación es análoga a la de demostración. La noción de proposición derivable es análogo a la de enunciado cierto, y la de

> proposición refutable análoga a enunciado falso. Finalmente, los teoremas del sistema formal son evidentemente análogos a los de la teoría intuitiva[31].

El programa hilbertiano establecía una correspondencia así entre la Aritmética y un sistema formal' Se trataba de, a través de reglas precisas bastante "intuitivas" en la metateoría, demostrar la consistencia de la teoría. En la metateoría las fórmulas válidas tenían que ser obtenidas a través de una secuencia de fórmulas de tal manera que cada una de ellas o fuese un axioma o fuese derivada a través de las reglas debidamente establecidas. Se podría entonces determinar si una fórmula o conjunto de símbolos es válida o no a través de un proceso "efectivo"; esto sería cuestión de cálculo y chequeo mecánico. Con la filosofía que ya hemos analizado y este programa Hilbert afirmaba que podía dar cuenta de sus objetivos, los que resumía en 1925 de esta forma:

> 1. Donde exista una esperanza de salvamento, deberemos cuidadosamente investigar las definiciones fructíferas y los métodos deductivos. Los cuidaremos, fortaleceremos y los haremos útiles. Nadie nos sacará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros.
> 2. Debemos establecer a través de toda la matemática La misma certeza para nuestras deducciones como existe en la teoría elemental de números, La cual nadie duda y donde las contradicciones y paradojas surgen solamente a través de nuestra propia falta de cuidado[32].

Hilbert no tenía dudas del éxito de su programa En la misma fecha decía:

> Es también una placentera sorpresa descubrir que, al mismo tiempo, hemos resuelto un problema que ha plagado a las matemáticas por un largo tiempo, viz., el problema de probar la consistencia de los axiomas de la aritmética[33].

Y concluía entonces:"lo que hemos experimentado dos veces, una vez con las paradojas del cálculo infinitesimal y otra con las paradojas de la teoría de conjuntos, no será experimentado una tercera vez, nunca jamás"[34].

En su artículo llamado "sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines" de 1931, Gödel destruirá de un plumazo toda la seguridad e ilusiones de Hilbert; pero, más aún, brindará elementos para intentar una nueva visión de las matemáticas. En su pequeño resumen de sus resultados que aparece bajo el título Diskussion zur grundlegung der mathematik y que fue publicado también en 1931 en la revista Erkenntnis, establecía Gödel.

> En el trabajo anteriormente citado se muestra que no hay ningún sistema formal con un número finito de axiomas que sea completo ni siquiera respecto de las sentencias aritméticas. Aquí entendemos por "sentencias aritméticas" aquellas en que no aparecen más nociones que +,= (adición, multiplicación e identidad, referidas a números naturales), además de los conectores lógicos y los cuantificadores universal y existencial, aplicados sólo a variables de números naturales (por lo cual en las sentencias aritméticas no aparecen más variables que las de los números naturales). Incluso para los sistemas formales con un número infinito de axiomas hay sentencias aritméticas indecidibles, con

> tal de que su esquema axiomático cumpla ciertas condiciones (muy generales). De lo dicho se sigue en especial que hay sentencias aritméticas indecidibles en todos los sistemas formales conocidos de la matemática por ejemplo, en Principia Mathematica (con axioma de reducibilidad, de elección y de infinitud), en la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo — Fraenkel y en la de Von Newmann, y en los sistemas formales de la escuela de Hilbert[35].

Las consecuencias de los resultados de Gödel son extraordinarias. Por un lado implican que cualquier formalismo, suficientemente fuerte para expresar partes básicas de la teoría elemental de números, es incompleto. La conclusión es que las matemáticas no admiten una formalización absoluta, y en las partes formalizables no se puede garantizar consistencia. Por otro lado, los métodos finitistas que usaba Hilbert podían ser codificados en una teoría que daba lugar a los mismos resultados. Dice Gödel:

> … una demostración de la consistencia de uno de estos sistemas S sólo puede llevarse a cabo con ayuda de modos de inferencia que no son formalizables en S. Por tanto, sería completamente imposible obtener una prueba finitaria de consistencia (como buscan los formalistas) para un sistema formal en el que estén formalizados todos los modos finitarios (es decir, intuicionísticamente aceptables) de prueba[36].

Gödel demostró que las pretensiones hilbertianas no podían tener éxito, que la prueba de la consistencia a través de los métodos hilbertianos no era posible y, más aún, ponía en cuestión los verdaderos límites de los sistemas formales en las matemáticas. Ladrière resume estas limitaciones:

> ... no es posible formalizar completamente una teoría matemática cuando ésta ha llegado a un cierto nivel de complejidad. En determinados casos, el modelo simbólico no consigue representar de manera adecuada los nexos deductivos que existen en el seno de la teoría bajo su forma intuitiva, no formalizada. En otros casos, el modelo fracasa cuando trata de representar ciertos conceptos intuitivos de la teoría. En cualquier caso, no se puede hacer abstracción de la relación de significación que liga el modelo simbólico al dominio matemático que trata de representar. Llega un momento de la interpretación que no puede ser puesto entre paréntesis. El recurso a la pura intuición del signo, tal como la entendía Hilbert, no es suficiente. La utilización del método formal marca un progreso evidente, y ha permitido obtener un cierto número de precisiones de largo alcance sobre la estructura de las teorías matemáticas, pero no dispensa ala matemática de mantener el contacto con ciertas intuiciones previas a la formalización y que ésta sólo puede ayudar a clarificar[37].

El objetivo de la formalización siempre fue eliminar la intuición cualquiera que ésta fuese, ligada a los procedimientos con los que el hombre se relaciona con las cosas materiales o ligada a indeterminadas "intuiciones" subjetivas innatas. Hilbert admitía como premisa la intuición del signo, pero en la formalización radical ya ni esta podía ocupar un lugar. La noción de un sistema formal corresponde a la existencia de condiciones deductivas—formales en las teorías matemáticas, a la racionalidad interior de las mismas.

En su apuntalamiento se buscaba encontrar el sentido más profundo de la naturaleza de las matemáticas. En esta visión de las cosas la pareja formalismo—intuición busca devenir solo el primer término, en un sistema cenado, completo. Los resultados de Gödel establecen que la intuición se niega a ser desterrada hasta en lo que parecía más propio de lo formal. La intuición no puede entonces desaparecer. Esto nos obliga a incidir en el esclarecimiento de esta noción y en la necesidad de un nuevo planteamiento teórico—filosófico sobre el carácter de las teorías matemáticas. Gödel conduce a romper el esquema del sistema absoluto y cerrado para todo discurso, conduce a romper la continua pretensión del racionalismo de dar a partir de la razón cuenta de toda la realidad. Ningún sistema racional puede comprehender la totalidad de lo real. Esto establece una verdad epistemológica, la recurrencia inevitable a la intuición no es la apelación a la interioridad subjetiva, manifiesta la necesidad del contacto material del sujeto con el objeto material. Las condiciones básicas de la intuición residen en aquellas de lo sensible y la experiencia (la intuición a la que me he referido de una manera metodológica y general por supuesto incluye aquella que surge en la experiencia de la práctica teórica matemática. Esta noción alude al conjunto de rasgos psicológicos que intervienen en el conocimiento y cuyo origen (aunque es diverso) se encuentra en la relación del sujeto con el mundo que se le opone y del que es parte). Los límites de los sistemas formales son los límites de lo racional en el conocimiento, es el reclamo de la práctica empírica, de la vida. Los resultados de Gödel son un duro golpe a la visión racionalista del conocimiento que había hecho de las matemáticas su reducto fundamental. Lakatos en un artículo de 1962 hace un agudo comentario a la visión racionalista que se encuentra detrás de las principales filosofías modernas de la matemática:

> La matemática, al igual que la lógica russelliana, tiene su origen en la crítica de la intuición; ahora bien, los meta—matemáticos — como hicieron los logicistas — nos piden que aceptemos su intuición como prueba "ultima". De aquí que ambos caigan en el mismo psicologismo subjetivista que en otro tiempo atacaron. Pero, ¿por qué empeñarse en pruebas "últimas" y autoridades "decisivas"? ¿Por qué buscar fundamentos, si se acepta que son subjetivismos? ¿Por qué no admitir honestamente la falibilidad matemática e intentar defender la dignidad del conocimiento falible contra el escepticismo cínico, en lugar de hacernos ilusiones de que podemos reparar, hasta que no se note, el último razgón del tejido de nuestras intuiciones "últimas"?[38].

El "dogmatismo "que encierran las filosofías modernas de la matemática es producto de una larga tradición racionalista que ha hecho siempre de las verdades matemáticas zonas "liberadas" infalibles. La base epistemológica ha sido la verdad absoluta incuestionable. En el logicismo las verdades son analíticas, "derivables de la lógica", se conectan a las leyes de la Razón, o se refieren a las cosas, pero en cualquiera de las aproximaciones son infalibles. Las verdades matemáticas se refieren a un "tercer mundo" ideal de objetos o constituyen un lenguaje sin relación a ningún mundo (son verbales), pero son infalibles. En el formalismo la infalibilidad se encuentra en la intuición de los signos, los trazos o las fórmulas; pero además los sistemas formales lo invaden y lo controlan todo, dan cuenta de la esencia de la matemática, de su racionalidad. En el intuicionismo la fundamentación se hace a partir de una intuición temporal que se engendra en el "paso del uno al dos"; el sujeto es el que hace infalible las verdades matemáticas. En el formalismo y en el intuicionismo se priorizan los métodos finitistas, constructivistas, se constituyen en el método cuasi—universal a través del cual lo que se toca se vuelve infalible. En el fondo, se enfatiza la lógica, el lenguaje, o la intuición, se parte de una misma premisa filosófica: la verdad absoluta. Esta sólo es posible a partir de ese poder de la razón para producir y crear verdades a priori. Lo que es tocado por lo empírico parece que se "contamina". Como señala Lakatos frente al escepticismo el racionalismo ha buscado la evidencia de lo infalible donde fuese posible y no lo ha encontrado.

Las implicaciones de los resultados de Gödel en los paradigmas sobre las matemáticas son decisivas. Las matemáticas no pueden ser vistas ya a través de la interpretación clásica axiomática, deductiva y formal. El paradigma formal recibió un golpe extraordinario. Pero también lo recibió el paradigma de las verdades infalibles producidas por la mente: el racionalismo. Con la caída del primero recibieron un golpe no sólo las filosofías racionalistas que lo habían integrado, sino también el positivismo lógico que había creído reducidas las matemáticas a un sistema sintáctico alejado de toda intuición. En las matemáticas hay intuición, existe "contaminación" empírica. Ni lo formal ni lo racional pueden dar cuenta completa de ellas. Al igual que con las otras ciencias se trata de disciplinas teóricas abiertas, donde fluye el aire fresco de la vida. Con el deterioro del segundo paradigma, la epistemología moderna ha recibido un precioso instrumento para intentar una auténtica revolución.

Al igual que el "factor paradojas" nos servía para dividir la historia de las matemáticas, el "factor Gödel" ahora nos permite completar nuestro cuadro. Este factor teórico determinante representa un punto de partida para una auténtica ruptura epistemológica en la reflexión sobre las matemáticas; la posibilidad de una mejor comprensión de las mismas. Pero además: representa la posibilidad de unas nuevas matemáticas. No ha transcurrido tal vez suficiente tiempo para que lo uno y lo otro se desarrollen a cabalidad, establezcan un nuevo espectro para las matemáticas y, entonces, para las ciencias en general. Estamos probablemente en una fase transitoria en busca de nuevas definiciones y categorías hacia la constitución de un nuevo paradigma, pero se ha iniciado un camino que me atrevería a llamar irreversible (que sólo podrá ser detenido no desde el interior de la evolución matemática, sino desde el exterior que la comunica con la vida y la historia de los hombres). La historia de las nuevas matemáticas conectan con el deterioro general de los hombres, en donde factores ideológicos, económicos, políticos y sociales en general son determinantes.

Notas

[1] Cf. Black, M. (1950). *The Nature of Mathematics*. London: Routledge and Kegan Paul Ltd. pp.4.
[2] Cf. Barker, S. (1965). *Filosofía de las matemáticas*. Trad. Carlos Moreno Cañadas. México: UTEHA. pp. 107 ss.
[3] Quine, W. (1962). *Desde un punto de vista lógico*. Trad. Manuel Sacristán. Barcelona: Ediciones Ariel. pp.40.
[4] Ibid. pp.42.
[5] Ladrière, J. (1981). *Limitaciones internas de los formalismos*. Trad. José Blasco. Madrid: Alianza Editorial, 1981. pp.47.
[6] Ibid. pp.44.
[7] Hilbert, D. en: Körner, S. (1969). *Introducción a la filosofía de la matemática*. Trad. Carlos Gerhard. México: Siglo XXI. pp.88.
[8] Hilbert, D. en: Ladrière. Ob. cit. pp. 27.
[9] Körner. Ob cit. p. 88.

[10] Curry, H. (1970). *Outlines of a formalist philosophy of mathematics*. Amsterdam: North—Holland. pp. 56.
[11] Ladrière. Ob. cit. pp. 49.
[12] Körner. Ob cit. pp. 105.
[13] Ibid. pp. 106.
[14] Wely, H. (1949). *Philosophy of mathematics and natural science*. Princeton: Princeton University Press. pp. 61.
[15] Curry. Ob. cit. pp. 58.
[16] Ibid.pp.62.
[17] Ibid. pp. 5.
[18] Heyting, A. (1956). *Intuicionism. An introduction*. Amsterdam: North-Holland. pp. 8, 9.
[19] Ibid. pp. 1.
[20] Ibid. pp. 4.
[21] Ibid. pp. 5.
[22] Ibid. pp. 6.
[23] Ibid. pp. 9.
[24] Ibid. pp. 13.
[25] Cf. Weyl. Ob. cit. pp. 63.
[26] Heyting. Ob. cit. pp. 11
[27] Kline, M. (1980). *Mathematics. The loss of certainty*. New—York: Oxford University Press. pp, 240.
[28] Ibid. pp. 241.
[29] Cf. Körner. Ob. cit. pp. 178.
[30] Ladrière. Ob. cit. pp. 55.
[31] Ibid. pp.55.
[32] Hilbert, D. *On the infinite.* en Benacerraf, P. y Putnam, H. (Edit.) (1964). *Philosophy of Mathematics. Selected readings.* New Jersey: Prentice Hall. pp. 141.
[33] Ibid. pp. 149.
[34] Ibid. pp. 150.
[35] Gödel, K. (1981). *Obras completas*. Trad. Jesús Mosterín. Madrid: Alianza Editorial. pp. 476.
[36] Ibid. pp. 100.
[37] Ladrière. Ob. cit. pp. 30.
[38] Lakatos, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Trad. Diego Ribes Nicolás. Madrid: Alianza Editorial. pp. 40-41.