FALSACIÓN Y MATEMÁTICAS

Referencia: año 1988. Inédito.

En este ensayo hacemos una indagación reflexiva sobre si la "falsabilidad" popperiana puede jugar un papel como criterio de demarcación en las llamadas ciencias "cuasiempíricas" (específicamente matemáticas). Adelantando nuestra opinión; la "falsación" empírica de una teoría matemática no implica necesariamente una afirmación relativa al grado de verdad de las misma; pero conduce sobre todo a la proliferación teorética. En buena medida lo que vamos a hacer es valernos del lenguaje de Popper en torno a los problemas de los criterios de demarcación para incidir de esta forma en algunos aspectos de la naturaleza de las matemáticas.

Recordemos el abc de la argumentación popperiana para sustituir el criterio de demarcación del neopositivismo[1]. Popper señala que no existe en ciencia la inferencia inductiva. Es decir, no se puede pasar lógicamente de la verdad de enunciados particulares a la verdad de teorías o enunciados universales[2]. Lo único que puede existir es la negación (falsación) de una teoría. Es decir, encontrar enunciados particulares que nieguen la teoría (enunciados particulares que nieguen enunciados universales)[3]. Lo anterior es la base de un criterio de demarcación entre conocimiento empírico y no empírico: la posibilidad de la falsación empírica es entonces el nuevo criterio. Es decir, una teoría es empírica -puesto en forma precisa el proceso demarcativo- si de ella pueden deducirse enunciados susceptibles de ser "falsadores". Se trata -por supuesto- de falsadores empíricos, "enunciados básicos". Una teoría es empírica si puede tener falsadores potenciales. O sea, la falsación supone un conjunto de falsadores.

Para Popper las teorías científicas no son verificables, sino contrastables[4]. Con esto Popper no pide que cada enunciado sea de hecho contrastado para aceptarlo, sino que sea susceptible de contrastación[5].

Vayamos a la matemática. Si las verdades de la matemática no son infalibles, ¿existen falsadores?. Y si existen, ¿cuál es su función?. La noción de la falsabilidad y de falsadores potenciales en la ciencia es útil en tanto permite un criterio para distinguir entre enunciados y teorías susceptibles de contrastación empírica, y los que no lo son. En esta última categoría entra la mayoría de enunciados de la metafísica y la teología y, tal vez, buena parte de otros que se les podría llamar metodológicos.

La falsabilidad como criterio de demarcación no se refiere a los aspectos "positivos" de las teorías, en el sentido del grado de aproximación de éstas a la realidad. Aparece si se quiere en un momento "previo". Se trata de un proceso de selección de teorías[6]. Lo que está por verse ahora es si falsabilidad juega el mismo papel en las ciencias "cuasiempíricas" como las matemáticas. En este sentido la indagación sobre la naturaleza de los falsadores resulta ser una indagación sobre la naturaleza de las matemáticas o la ciencia[7].

En matemáticas podemos encontrar dos tipos de falsadores potenciales: los lógicos y los heurísticos. Los primeros son "enunciados de la forma "p y no-p."[8]. Los segundos son los que pertenecen a las teorías informales, cuya formalización niega el enunciado que se trata de falsar en la teoría formal a al que pertenece. Estos últimos se originan entonces en la puesta en conexión de una teoría debidamente formalizada y una informal[9]. Se han realizado bastantes trabajos hasta la fecha que han mostrado un buen número de falsadores potenciales de teorías formales matemáticas [10].

Una de las teorías informales usada para estos procesos de falsación puede ser la teoría elemental de números; en cuyo caso se habla de falsadores aritméticos[11]. En qué medida estos no son simplemente lógicos depende de la escogencia de los enunciados aritméticos básicos. Para Hilbert la reducción de estos condujo a reducir falsadores a los falsadores lógicos. Mientras que, para Gödel, la ampliación de éstos y del rango de los métodos de prueba, como señala Lakatos: "... divorció la verdad de la consistencia e introdujo un nuevo patrón de conjeturas y refutaciones basado en la falsabilidad aritmética: ello posibilitó la aceptación de teorías especulativas arriesgadas con axiomas muy fuertes y ricos, si bien criticándolos desde el exterior por medio de teorías informales con axiomas débiles y parcos"[12].

La escogencia de las teorías y enunciados que sirven para falsar es toda una discusión. Se puede aceptar la teoría de conjuntos en diferentes partes, etc.

Ahora bien, el papel de los falsadores heurísticos en las matemáticas no es idéntico al de las otras ciencias. No es posible pretender que un falsador heurístico de una teoría represente sin más una situación fáctica. Es decir, un falsador heurístico no es necesariamente empírico. Más aún, normalmente no es empírico. Por eso Lakatos reconoce los límites de la falsación en matemáticas de la siguiente manera: "El papel crucial de las refutaciones heurísticas es cambiar los problemas por otros más importantes, estimular el desarrollo de sistemas teóricos con más contenido".[13]

El punto crucial que aparece aquí es el siguiente. La falsación plantea una traslación -digamos útil- de unas teorías a otras. Pero ¿podrá llegarse con este proceso a poner en relación teorías abstractas de la matemática con propiamente empíricas? Es decir, ¿permitirá la falsación una sanción teorética sobre la naturaleza de las matemáticas? Es nuestra opinión que la falsación -aunque no garantice su éxito en la "prueba" de la naturaleza empírica de las matemáticas"- abre un programa teórico real de trabajo en esa dirección.

Para la ciencia en general los falsadores empíricos aparecen de una manera digamos más rápida que con relación a las matemáticas. En teorías simples los falsadores aparecen muy rápido. En teorías más complejas, debe pasarse por varios niveles intermedios previos. Es lo que Popper trata de explicar cuando plantea: "Los sistemas teóricos se contrastan deduciendo de ellos enunciados de un nivel de universalidad más bajo; estos puestos que han de ser contrastables intersubjetivamente, tienen que poderse contrastar de manera análoga -y así *ad infinitum*."[14]

Se puede plantear el asunto como cadenas de teorías T_1-T_2-T_3-...T_n. n corresponde al momento de los falsadores empíricos propiamente. Tanto en física (en sentido general) como en matemáticas n dependería de la teorías en consideración. Es razonable suponer que n sería más grande dependiendo del grado de abstracción de la teoría (T_1) en cuestión. Podría también decirse que una mayor matematización de una teoría física haría crecer n.

Por el otro lado, es claro que tanto en física como en matemáticas un paso de falsación brinda una opción sobre teorías. La existencia de un falsador plantea si se escoge o no la teoría en cuestión o si esta se modifica adecuadamente. Es evidente -no obstante- que en matemáticas el grado de escogencia y la posibilidad de movimiento es mayor. Puesto de otra forma, la abstracción y generalidad de las matemáticas permiten una proliferación mayor de teorías consistentes en sí mismas.

Introduzcamos más consideraciones en torno a este asunto. Es importante entender que los criterios de validez y coherencia en las matemáticas son extraordinariamente valiosos. Es un punto de partida en la valoración de una teoría matemática, pero es un criterio imposible de obtener en una multitud de casos y es, además, insuficiente. Quiero ser categórico en esto. Si la matemática posee un contenido referido a la realidad material, la confrontación práctica con ella es inevitable. Existen partes de la matemática "obvias" (en el sentido de Quine), pero no son éstas las que determinan su esencia[15]. El criterio empírico debe reformularse para las matemáticas, pero no puede desaparecer. En última instancia tanto las teorías altamente formalizadas como las informales deben estar conectadas con la realidad empírica, de una u otra forma.

El criterio de la aplicabilidad, en un sentido muy amplio de ésta, se convierte en la piedra de toque de las matemáticas. Tal vez no sea el más sencillo, pero tarde o temprano se deberá llegar a él. En este sentido lo que se establece como guía metodológica es la búsqueda de la conexión de las teorías matemáticas con la explicación y la aplicación empíricas.

¿Cómo se podría plantear esto en términos prácticos? Este se puede realizar a través del establecimiento de adecuadas correspondencias entre ellas y teorías empíricas aceptables, en la elaboración de modelos empíricos para éstas. La conexión de las teorías matemáticas y la realidad material son el terreno fundamental de la práctica matemática (y tal vez de la ciencia en general), no sólo en cuanto a un sentido pragmático de la misma, sino en cuanto al desarrollo de las condiciones que mejor permiten develar su naturaleza última. En la "aplicación" encontramos el factor más dinámico de su desarrollo, así como las posibilidades de su valoración teórica. Es muy probable que las visiones formalizantes y racionalistas de las matemáticas hayan obstaculizado estas condiciones y eso esté presente precisamente en las razones del atraso teórico de los resultados matemáticos en su "aplicación"[16].

En la búsqueda de la conexión matemática-realidad que he señalado, es necesario entender que no se trata tanto de hacer corresponder enunciados a hechos, o algo similar, sino, sobre todo, complejos estructurales, teorías, a situaciones de la realidad. El sentido estructural que si bien no engloba todo en matemática, es un aspecto central de la conexión a la que me refiero.

En otro orden de cosas, debemos hacer algunas observaciones adicionales. En la práctica de la matemática sólo podemos aspirar a evidenciar una aplicabilidad de sus teorías, pero no demostrar su no aplicabilidad. Esto es una característica específica que le separa -aunque sólo en cierta medida- de otras ciencias. La explicación epistemológica de esto parte del objeto propio de las matemáticas. El objeto de las matemáticas no es lo aprehendido como particular-singular, de tal forma que se pueda dar cuenta de ello o no de una manera casi definitiva. Al igual que no se podían rechazar -en un primer momento- las geometrías no euclidianas por no obedecer estas a una "intuición" tradicional del espacio, las estructuras y teorías matemáticas aparentemente extrañas o "degeneradas" pueden eventualmente corresponder al devenir real. Si no es posible desecharlas de una manera definitiva, esta situación apunta a la intervención de un factor histórico en todo esto. La valoración de las matemáticas estaría -entonces- en función de los resultados de aplicación obtenidos, en función entonces del tiempo y de lo social. Por eso es tan importante la conciencia que se tenga de su naturaleza.

Por otra parte, con relación a las ciencias en general, debe decirse que tampoco deben rechazarse teorías porque estas no correspondan "naturalmente" a la lógica o al sentido común, o aparentemente a la realidad. Por su abstracción, en matemáticas es más fácil que esto ocurra. Pero no es una exclusividad. Lo exclusivo es si se quiere esa facilidad de que ocurra, característica que a su vez se amplifica en las ciencias que sufren un mayor nivel de matematización.

Las matemáticas nos brindan cuerpos teóricos que no poseen una verdad infalible, pero además deben de manera general plantearse como susceptibles de falsación, si por ello se entiende falsabilidad empírica. Los falsadores lógicos o heurísticos juegan un papel útil y altamente importante en el desarrollo coherente y diversificado de las matemáticas, pero no conducen al sentido de verdad (siempre relativa) que sólo la experiencia puede proporcionar. Falsadores empíricos también deben juzgar a las matemáticas. Vayamos a otro tema.

El paradigma que afirma a la matemática separada del mundo empírico ha cundido tanto en la conciencia de Occidente, que el término aplicación encierra un gigantesco equívoco teórico[17]. Da la impresión de que se hacen matemáticas más o menos en el vacío y que, luego, por la vía del ajuste que materializa la armonía preestablecida, estos resultados se usan para explicar o incidir en la realidad práctica. Sin pretender subvalorar el papel de las abstracciones "puras", separadas de un objeto de aplicación inmediato, debo señalar que el desarrollo matemático funciona diferentemente. A partir de los objetos materiales, a partir de lo que se manifiesta como "problema" práctico, se engendran las condiciones para la especulación matemática. Toda la matemática hasta nuestros días -de una manera general- de una forma u otra se ha desarrollado a partir de las necesidades prácticas en las técnicas, en las ciencias particulares, en la cultura, etc. Las nociones y métodos centrales de la matemáticas han estado ligadas al devenir material y social; desde las primeras etapas de la historia humana.

Podríamos plantear una tesis que afirma la existencia de "situaciones matemáticas". Estas podrían definirse como aquellas condiciones históricas que engendran la construcción matemática. En estas aparecen diversos factores e influencias: las técnicas y las ciencias normalmente llamadas físicas, la cultura, el estado del conocimiento, las necesidades lógicas, y muy especialmente las condiciones mentales del individuo que hace matemáticas. En esto el azar interviene de una manera muy especial. En general la forma en que se estructuran estas influencias es un problema concreto a resolver por la vía del análisis concreto.

Así ha sido. La conexión de la economía, de la producción, hasta... de la guerra, con las ciencias, ha sido muy estrecha. En la conexión de las ciencias particulares con las matemáticas se ha fundido muy especialmente la vitalidad de éstas últimas. En el fondo no existe la separación en compartimentos de la matemática "pura" y la "aplicada". En este sentido es preferible ver a las matemáticas como un proceso único en el que ha estado siempre presente la combinación permanente de lo más abstracto con lo más ligado al mundo empírico[18]. A veces lo predominante es una cosa, a veces otra. El análisis en esto debe ser siempre concreto. Ahora bien, en esta conjunción mutuamente condicionante aparecen las direcciones vectoriales del conocimiento. El objeto de las matemáticas pertenece a lo real material y, como tal, éstas sólo pueden dar cuenta de él en la medida en que estén conectadas con lo material directamente[19]. Lo "aplicado" es -a la larga- el motor decisivo de las matemáticas (lo cual no implica que lo "puro" desaparezca o no intervenga en la evolución de las matemáticas de forma determinante). Lo aplicado aquí es lo que hace referencia a la relación con la vida, la sociedad y los auténticos vínculos de la creación matemática.

La conciencia sobre lo anterior ha estado condicionada en Occidente por los paradigmas formalizantes y racionalistas sobre la matemáticas. Cuando se hecha una mirada en el antiguo mundo, se observa en *Los Elementos* de Euclides, en las secciones cónicas de Apolonio, y hasta en los trabajos teóricos de Arquímedes, lo axiomático, lo deductivo, lo racional, lo "puro". Se busca siempre la interpretación histórica que sirve a los paradigmas del presente[20]. No se ha apreciado suficientemente que aunque Euclides, Apolonio y Arquímedes formularon sus resultados axiomática y deductivamente, estaban comprometidos en una relación íntima con el mundo material, al que querían explicar y, de alguna forma, transformar. La búsqueda de fundamento en geometría euclídea no era el deseo de la voluntad deductiva "pura", sino la búsqueda de la verdad en una multitud de proposiciones de la realidad. Es imprescindible buscar un equilibrio interpretativo. Las geometrías no euclídeas, supuesta señal de lo abstracto y puro, fueron la fuente de muchos intentos por darles un contenido material.

La historia de las matemáticas (como la historia de una práctica teórica que tiene un objeto en el devenir real), debe ser la historia de la conexión y producción, de sus resultados con este último. Encontramos lo "puro" y lo "aplicado" combinado en ese sentido. Es aquí donde encontramos justificación a lo que dice Von Neumann: "El hecho más vitalmente característico de la matemáticas está, en mi opinión, en su completamente peculiar relación con la ciencias naturales"[21].

Pero no todo es historia. El sentido de las matemáticas en el futuro también será determinado por esta realidad y si una conciencia mejor sobre ella es posible, ésta se convertirá en factor influyente de su propio decurso.

La historia de las construcciones matemáticas, de sus impulsos, sus motivaciones diversas, y de su aplicación, es precisamente la única historia de las matemáticas. Y en esto intervienen -como decíamos antes- las circunstancias mentales de los individuos que han participado en estos procesos.

La "aplicación" debería desaparecer como concepto explicativo en torno a la naturaleza de las matemáticas. Tal vez sólo sirva como forma de juzgar, descubrir un fenómeno particular. He querido usar la noción de aplicación algo así como Wittgenstein usó la de filosofía, es decir instrumentalmente. Una vez usada se puede eliminar (aunque no suceda así con la filosofía -a diferencia de lo que pensaba Wittgenstein-) Con ello sólo quiero enfatizar de nuevo esa errónea visión de elaborar por un lado y luego aplicar.

En la definición de la naturaleza de las matemáticas debemos ver el sentido histórico y concreto de cada una de estas construcciones y -específicamente- de su relación con la aplicación. En cada una de ellas diferentes factores intervienen.

El asunto de la aplicación puede inscribirse sobre todo en el territorio de la acción y la prospectiva práctica. En nuestra opinión, la aplicación -y entonces la relación estrecha con la tecnología y las ciencias- se conecta a la posibilidad de encontrar los mejores substratos o factores dinamizantes para el progreso de las construcciones matemáticas.

Tal vez tengan razón aquellos que piden desligarse de la problemática veritativa en matemáticas, y concentrarse en esa relación, donde la utilidad se vuelve esencial[22], y solo reducir el esfuerzo a cuidar la coherencia lógica teórica de los cuerpos teóricos matemáticos. Aquí volvemos a caer de nuevo en la discusión original. En lo que se refiere a los fundamentos de la matemática -y en esto quiero ser radical- el asunto es distinto. No se puede pasar por alto la realidad de un objeto teórico en beneficio de un pragmatismo no totalmente seguro. Las consideraciones veritativas se vuelven importantes a la hora de definir los límites y la forma de considerar los problemas de la evolución de las matemáticas. Más aún, es posible encontrar una gran riqueza teorética en los intentos prácticos de fundamentación matemática; claro está no entendiendo a esta como el rol de brindar una base teórica absoluta e infalible sino como el de encontrar las relaciones entre sus cuerpos teóricos y otros de las ciencias en general. Puesto en el lenguaje que desarrollamos antes, el estudio de la falsación como proceso y proyecto en el camino hacia la correlación de las matemáticas más abstractas con las teorías y enunciados empíricos, puede representar un programa de trabajo del que pueden salir interesantes avances matemáticos y también metodológicos para la ciencia en general.

NOTAS

[1]Cf. Popper, Karl. *La lógica de la investigación científica*. Madrid: Tecnos, 1982. P. 33.
[2]Cf. *Ibid*. pp. 28-29.
[3]Cf. *Ibid*. pp. 39-40.
[4]Cf. *Ibid*. p. 43.
[5] Cf. p.47.
[6]Cf. p.41.
[7]Cf. Lakatos, Imre. *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid: Alianza, 1981. P. 57.
[8]Cf. *Ibid*. p. 58.
[9]Cf. *Ibid*. pp 58-59.
[10]Cf. *Ibid*. p. 60.
[11]Cf. Ibid. p. 59.
[12]*Ibid*. p. 60.
[13]*Ibid*. p. 63.
[14]Popper. Op. cit. p. 46.
[15]Cf. Quine, W.V.O. *Filosofía de la Lógica*. Madrid: Alianza, 1977.
[16]Cf. Kline, M.. *Mathematics: the loss of certainty*. New York: Oxford University Press, 1982.
[17]Un desarrollo de este tema se puede consultar en mi artículo: "De si las matemáticas sirven para algo, o una discusión sobre las matemáticas aplicadas", en *Desarrollo*, N.5, Agosto 1987.
[18]Esto también se puede consultar en mi artículo "Implicaciones teórico-filosóficas del Teorema de Gödel en el paradigma racionalista sobre las matemáticas". *Rev. Filosofía*, UCR, Vol. XXIII, N.58, Dic. 1985.
[19]Véase Ruiz, A. "Epistemological Constituents of Mathematics Construction. Implications in its teaching". *Proceedings of the In- ternational Conference on the Psychology of Mathematics Education*, Julio 1987, Montreal, Canadá.
[20]Una interpretación de la historia de las matemáticas según este punto de vista se puede ver en Ruiz, A. "Fundamentos para una nueva actitud en la enseñanza moderna de las matemáticas", *Boletín*, Sociedade Paranaense de Matemática, Vol. VIII(1), Junio 1987, Curitiba, Brasil.
[21]Cf. Kline. Op. cit.
[22]La visión a la que me refiero aquí es la del neopositivismo, bien expresada en Ayer, A. J. *Language, truth and logic.* England: Penguin, 1983.