LA ARITMETICA EN FREGE: UNA INTRODUCCION AL LOGICISMO

Ángel Ruiz
www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz

Referencia: año 1984. Ciencia y Tecnología, Volumen VIII, No 1, Editorial Universidad de Costa Rica.

Introducción

La influencia de Gottlob Frege (1848-1925) ha sido decisiva para muchos importantes pensadores de nuestro siglo. Su obra recorre los dominios de la Matemática, la Lógica, la Lingüística y la Filosofía. Toda ella plantea derroteros para la reflexión. Su sistematización de los resultados lógicos, su ampliación, el paso a una rigurosa teoría de la cuantificación, lo colocan como uno de los lógicos más importantes después de Aristóteles. Sin embargo, Gottlob Frege fue poco escuchado y poco leído, llegando incluso a tener que pagar de su bolsillo la edición de su obra cúlmine: *Grundgesetze der Arithmetik*.

No hay duda que Frege ha dejado una profunda huella en la Filosofía moderna de la Lógica y la Matemática. Frege, guió sus investigaciones teóricas por la luz de un proyecto que consumió años do años para luego terminar descalabrándose súbitamente dentro de un pantano de paradojas y contradicciones, no resueltas de una forma completa todavía.

Frege en el curso de dar forma al proyecto de la Logicización de la Aritmética hizo correr su agudo y sistemático ingenio en diferentes suelos de los que extrajo muchos frutos. La construcción del *Begriffsschrift*, concebido como una forma útil al desarrollo de sus ideas sobre Aritmética, decantó cono una obra de lógica excepcional. Distinto del propósito de Boole de representar una lógica abstracta por fórmulas, Frege trataba de crear un lenguaje preciso y formalizado, para expresar los contenidos de las reflexiones aritméticas y de las ciencias en general.

Frege quería crear no un mero *calculus ratiocimator* sino, una *lingua characterica*, en el sentido leibniziano. Su realización lo llevó a construir una rigurosa teoría de la cuantificación, el análisis, simbología y reglas determinantes de la lógica moderna.

Sus estudios de semántica crearon una fuente de la que muchas ideas se han extraído. Distinciones en la semántica como objeto y función, concepto, propiedad y característica, así como sentido y referencia, por ejemplo, fue retomada por Wittgenstein, hecho que señala Hidé Ishiguro, en el libro de Peter Winch y colegas, Estudios sobre la filosofía de Wittgensteim (Buenos Aires; Eudeba. 1971, pág. 4), de la siguiente manera: "En todo el *Tractatus*, Wittgenstein, hace un distingo en "Sinn" y "Bedeutung", en una forma que corresponde en términos generales a las últimas obras de Frege y parece claro que, cuando Wittgensteim repitió este axioma de las *Foundations of Arithmetic* de Frege en Tractatus 3.3 y 3.3.14. tomó Bedeutung en el sentido de "referencia". La problemática sobre la designación y los nombres lógicamente propios surge con él.

Las relaciones entre las ontologías que define Frege y la "logicización" son de importancia para comprender todo el pensamiento fregiano. Su concepto de número y el hecho que establezca un Tercer Mundo de conceptos que no son "ideas", en sus términos, ni objetos sensibles, que son independientes de la conciencia y que su verdad es eterna, son aspectos imbricados y condicionados mutuamente.

El pensamiento de Gottlob Frege se coloca en un siglo sumergido en un gran desarrollo de la producción de desarrollos matemáticos. Las geometrías no euclidianas junto a los nuevos desarrollos algebraicos y del análisis crea ron las condiciones de una exigencia de rigor y formalización de los resulta dos matemáticos. Es el período de la teoría de conjuntos y de los números transfinitos de C. Cantor. El estudio de Boole condensado en sus *Laws of Thought* ha mostrado una relación importante entre la Lógica y el Algebra. Frege reflexiona en un momento esencial del desarrollo de la Matemática.

El objetivo del ensayo que presentó es el análisis de algunos aspectos de las nociones de número y del proyecto logicista levantado por Frege. Parto de la premisa metodológica de que no existe una filosofía de la matemática que pueda analizarse sin vinculación con la ontología y la epistemología para su buen decurso. Más aún, considero que la posición que un pensador posea frente a la epistemología, que considero no puede dejar de estar en relación directa con la ontología, es determinante para comprender la posición que frente a la matemática se puede poseer. La ontología y epistemología que un pensador plantee son necesarias de señalar para aproximar adecuadamente cualquier aspecto particular de su pensamiento.

En Frege fue una visión general sobre la verdad y la naturaleza de la aritmética lo que determinó la edificación de su proyecto logicista. Siempre estuvo implícita en los desarrollos teóricos en torno a esto. Mi objetivo es apuntar en la descripción introductoria de las nociones fregeanas la esencial conexión de las mismas con la actitud y visión filosóficas generales de Frege. Para esos efectos primero analizo la noción de número en Frege, para luego pasar propiamente al escrutinio del proyecto logicista.

1. El concepto de número en Frege es esencial para comprender toda su obra; posee coherencia en el conjunto de todos los proyectos y realizaciones que puso en ejecución en su vida. Su concepto de número en general es una reacción a las posiciones de las tendencias filosóficas prevalecientes sobre los números y la matemática: contra el empirismo, el psicologismo y el formalismo. Frege se dirige contra las posiciones de J.S. Mill de que el uso de la definición de un número en forma correcta exige el conocimiento de un hecho físico específico y que el signo "+" se refiere a la adición física. Mill sostuvo que la aritmética descansa en la inducción de hechos relativos a agrupaciones concretas. Frege critica a Mill preguntando por el hecho físico que se encuentra detrás de la expresión 1.000.000 = 999.999 + 1 y mostrando como formulas que involucran el "+" pueden referirse a hechos, situaciones, virtudes, y no a agregados físicos. La crítica de Frege a Mill es válida en muchos aspectos. La aritmética no es una mera colección de productos de la inducción de hechos de agrupaciones concretas. Es cierto también que el "+", la suma, se refiere también a hechos no físicos. Sin embargo, Mill no posee una orientación general incorrecta cuando pone en la práctica humana, en las relaciones empíricas, el origen más general de las teorías de la aritmética. La aritmética posee leyes propias que dan lugar a resultados, bajo la acción del quehacer matemático, obtenidas independientemente de experiencias concretas, o reducidas a la aplicación de la inducción. La actitud empirista es mecánica. Pero, esas leyes no son producto de Dios ni del azar, sino que corresponden al devenir del mundo real, establecidas teóricamente en el decurso de la relación entre los hombres y la naturaleza en forma histórica; una relación profundamente empírica. Por otra par te es correcto señalar a la suma, al "+", como adición de cosas no físicas meramente, pero es falso suponer que ésta no se establece prominentemente. La adición física es esencial para el desarrollo de la atracción matemática; no es única, pero sí la fundamental,

pues está más próxima de la comprensión, en el desarrollo humano, la diferenciación simple física, que la temporal u otras más complejas.

La crítica de Frege a los formalistas se manifiesta en el segundo volumen de sus Grundgesetze aparecido en 1903. Lo esencial que dice Frege es que resulta absurdo pensar que meras combinaciones do trazos sin significado alguno puede llamarse matemática. Frege pregunta ¿cuándo se le da significado a los símbolos usados en las combinaciones?. Frege, señala Kneale en su Desarrollo de la Lógica: ". . .no niega la posibilidad de que, dentro de su propio sistema deductivo, quepa dar todos los pasos necesarios para la derivación de una fórmula sin necesidad de tener en cuenta para nada los significados de los símbolos que se manejan; pero no obstante advierte que, lejos de conducir a una notable simplificación, la negativa a interpretar aquellos símbolos complicaría más el problema, ya que el interés de las fórmulas matemáticas radica en la posibilidad de su aplicación, seamos francos con nosotros mismos y admitamos que nuestras reglas de cálculo no se eligen arbitrariamente, sino dependen de los significados asignados a nuestros símbolos. Si ideáramos un juego para jugar a él sobre un papel con trazos desprovistos de significados y de acuerdo con reglas arbitrarias, es obvio que ese juego no merecería ser considerado como una rama de la matemática" [1].

Es claro que los objetos y las reglas básicas de la matemática pueden tratarse en forma de sistema axiomático abstracto. Estos objetos podrían, hasta cierto punto, ser variables. Este no es el problema. Lo que es necesario dejar claro es que las reglas son reglas que corresponden al objeto, el objeto determina sus reglas aun que después (en el tiempo y la historia) "obviemos" los objetos originales, son reglas objetivizadas. Eso no quiere decir que no podamos distribuir, organizar, estas reglas y diferentes objetos. Es correcta la afirmación de Frege de que no cualesquiera reglas y símbolos indeterminados son matemática. Lo que Frege no aclara es si para él toda colección de objetos matemáticos, a que se aplican, reglas poseen un significado o contenido ligable a lo material. Es decir, si entes matemáticos que se construyen y son resultados sobre la aplicación de reglas concretas en matemática, dan a luz entes y productos con significado o contenido aplicable siempre a la realidad objetiva o material?

La crítica de Frege al subjetivismo se realiza tanto en el campo de la Lógica como en el de la Matemática. En forma resumida Frege establece su opinión en *The Thought*: A Logical Inquiry:

> But nothing would he a greater misunderstanding of mathematics than its subordination to psychology. Neither logic nor mathematics has the task of investigating minds and the contents of consciousness whose bearer is a single person. Perhaps their task could be represented rather as the investigation of the mind, of the mind not of minds.[2]

Las leyes de la Matemática y de la Lógica (la inferenciación, etc.) no son dependientes de la acción del pensar, de los sujetos pensantes individuales, o de los contenidos particulares del pensar. Esta observación es correcta. Sin embargo, el cómo se piense (se infiere, etc.), el cómo los hombres establecen proposiciones acerca de lo real, están profundamente ligados en su esencia a las leyes de la Lógica. Incluso la historia de las nociones lógicas debería hacernos reflexionar sobre esto.

Frege encuentra un "común denominador" en los errores de las tres corrientes filosóficas. Passmore nos lo explica así:

> Philosophers have been forced into one on the other of these unsatisfactory Theories, he thinks, because they have wrongly supposed that whatever is objective must exist in space. Thus they were compelled to choose between treating numbers as spatial (whether as groups of objects or as marks on pages) or else as subjetive. But this, according to Frege, is a false antithesis: 'number are neither spatial nor physical nor subjetive like ideas, but non-sensible and objetive.[3]

Frege establece una concepción independiente sobre los números correspondiente a sus ideas ontológicas.

Mosterín resume la caracterización de Frege sobre los números de la manera siguiente:

> Los números no se dicen de las cosas, sino de los conceptos. Si decimos que la tierra tiene un satélite, o que nuestro sistema solar tiene nueve planetas, o que no hay habitantes en Marte, estamos diciendo algo de conceptos: que bajo el concepto "satélite de la tierra" cae un individuo, bajo el concepto "planeta de nuestro sistema planetario" caen nueve individuos y bajo el concepto de "habitantes de Marte" no cae ningún individuo.[4]
>
> Passmore explica a Frege así:
>
> If we consider a physical thing, he says, he see at once that is has not in itself any specific numbers. For example, a heap of stones can be one (as a single heap) or twenty (as containing twenty stones) or five (as being made up of five layers). It has not in it self any of these numbers and even more obviously, he says, it cannot be "nought". Frege concludes that what is being numbered is not a set of objects but a concept.[5]

Efectivamente, Frege establece el carácter de los números cono señalan Mosterín y Passmore. En su Prólogo a la *Grundgesetze der Arithmetik* de 1893 dice:

> Lo fundamental de mis resultados lo expresé allí, en el 146, diciendo que la asignación de número es una aserción sobre un concepto, y en eso se basa el presente sistema. Si alguien tiene una concepción distinta, que intente fundamentar sobre ella mediante signos un sistema consecuente y útil, y verá como no se puede. En el lenguaje natural, la situación no es, claro esta, tan transparente; pero si se examina cuidadosamente, se hallara que también aquí al asignar un número se nombra siempre un concepto, no un grupo, un agregado o algo por el estilo, y que, incluso si esto ocurre alguna vez, el grupo o el agregado siempre están determinados por un concepto, es decir, por las propiedades que debe tener un objeto para pertenecer al grupo, mientras que para el número es completamente indiferente lo que hace grupa al grupa, sistema al sistema, a las relaciones que tienen las términos entre sí [6].

La concepción de Frege sobre los números plantea un problema que es de hecha epistemológica y ontológica; par tanto sola desde una aproximación que parta de la totalidad puede comprenderse y ser objeto de una crítica correcta.

La conciencia, el pensar, el pensamiento y el lenguaje son elementas ligados entre sí y producto todos de la actividad social de los hombres por la satisfacción de sus necesidades materiales. La conciencia del hombre es esencialmente el "ser consciente", de lo que le rodea, de lo objetivo a lo que se opone como sujeto, y de sí mismo. La expresión de la conciencia es la expresión limitada al desarrollo social- histórico concreto del hombre y su misma conciencia, de lo que le rodea, del objeto del que es a su vez parte. La matemática es parte de los productos de la conciencia, de los hombres en su proceso de vida. La matemática nace, coma todas las disciplinas teóricas, en el seno de la relación social hombre-naturaleza. Los conceptos teóricos de la aritmética y de la geometría son construidos por los hombres como partes integrantes de la elaboración de su conciencia para conocer y utilizar el mundo real. Nacen históricamente ligados a las actividades específicas del contar y el medir, necesarias en su práctica vital. Son conceptos que se refieren y expresan con aproximación determinada, a leyes y propiedades de lo real, al devenir de la realidad de la que son parte activa. No son inventos de la fantasía mitológica. Son el desarrollo global de las sociedades, la cultura, el conocimiento… Es tos conceptos matemáticos han sido agrupados, ordenados, se han creado nuevos conceptos y se han mejorado los anteriores. Estos elementos han sido ligados por reglas concretas que corresponden, aunque no como un reflejo mecánico, a las leyes del devenir de lo real. La conciencia de los hombres partiendo de los conceptos y con las reglas obtenidas no arbitrarias elaboró por la vía del pensamiento nuevos resultados. Si bien los conceptos de la Matemática nacen de una relación empírica, práctica, de los hombres con la naturaleza esos conceptos no están en relación con lo empírico y material, mecánica y directa. Sobre la base de las reglas originales, modificaciones y sustituciones pueden hacerse no dando lugar necesariamente a reglas de funcionamiento de algún proceso de lo real.

La Lógica como ciencia, considero, se origina como la teorización de las reglas de la inferencia válida, como el cuerpo de conocimiento y de investigación cuyo objeto es las leyes y reglas de la actividad del sujeto, del pensar. Se trata, sin embargo, no de un sujeto particular o del contenido individual de lo pensado, sino de un sujeto hipotético, ideal: que "resuma" la conciencia de los hombres como capacidad práctica. Sin embargo, las leyes de la expresión de la conciencia, de manera abstracta, corresponden también necesariamente, en una forma concreta, a las leyes del objeto, del devenir de lo real. Las leyes de la actividad del sujeto corresponden a las del objeto material. Por lo tanto, la aplicación-deducción de las leyes de la lógica en la Aritmética y la Geometría da origen a resultados que no son ajenos a la aproximación teórica por el sujeto del objeto. La aproximación dependerá de los objetos y reglas matemáticas que se hayan aprehendido. La aproximación específica no es, sin embargo, un problema mera y estrictamente teórico es también práctico.

Sobre la base del anterior desarrollo podemos contestar ¿qué es un número?. Los signos 1, 2, 3, 4,..., por ejemplo, corresponden a conceptos específicos matemáticos. Estos conceptos corresponden a propiedades de los real, de la naturaleza y de la sociedad, a objetos como situaciones del movimiento de la realidad. Así pues el número como concepto para nosotros no es algo que se refiere a conceptos; el número es una expresión de aspectos de la naturaleza y la sociedad. Se puede decir entonces que el número es un concepto, un objeto teórico.

Las reglas de funcionamiento de los números como conceptos, y que dan origen a otros conceptos, no son arbitrarios, no nacen del número como conceptos en sí, nacen de las reglas a que obedecen los aspectos del devenir de lo real a que se refieren. Esas reglas la conciencia de los hombres las aprehende por medio de un proceso práctico y teórico, pero, que fue primariamente empírico y práctico. Yo no digo que la realidad material de la que es expresión el número como concepto sea aprehensible por los hombres de la misma forma, por ejemplo, que el color verde de algunas cosas lo es. Lo que sí afirmó es la base material de lo que llamamos números. Los números expresan, en concreto, la diversidad del movimiento de lo que existe.

La concepción de Frege de lo que es un número no corresponde evidentemente a la que hemos expuesto. Su concepción lo lleva a considerar los números como objetos de orígenes no sensibles sino referidos a conceptos, es decir, se refieren a los productos de la conciencia, o sea a los conceptos. La pregunta que se plantea es de dónde provienen las reglas que poseen los números". Frege no es claro. Como los números no se refieren a objetos materiales o físicos, no provienen de ahí, se podría decir que, se desprende que las leyes y reglas de los números provienen del mundo al que se refieren, es decir: del de los conceptos. Es claro, entonces, que todo lo anterior solo puede tener conciencia si ese mundo es en sí "timeless",. ..Es decir si posee una estabilidad y permanencia. Frege con esta concepción del número solo podía dar a luz su llamado Tercer Mundo conceptual que constituye la parte importante de una de sus primeras divisiones ontológicas, en donde separa idea, objeto material y concepto. Es a partir de aquí totalmente claro, también, como la dialéctica del crear y descubrir los conceptos que aproximan los procesos de los real, se resuelven en Frege por la vía de un Tercer Mundo, real pero no sensible.

Es correcto lo que Frege señalaba cuando decía que: "Lo fundamental de mis resultados lo expresé allí (...) diciendo que la asignación de número es una aserción sobre un concepto; y en eso se basa el presente sistema"[7].

2. Dos proyectos esenciales en los Fundamentos de la Matemática planteó el desarrollo de la práctica de las Matemáticas en el siglo XIX: la aritmetización del análisis y la logicización de la aritmética. Problemas ambos ligados en los conceptos y resultados matemáticos decimonónicos. El primer proyecto fue afrontado de dos maneras diferentes; la primera sugerida por Weierstrass y desarrollada por Cantor, y la segunda por Dedekind en su Stetigkeit und irrationale Zahlen de 1872. La primera se trataba de la expresión de un número real por una sucesión infinita de números racionales. La segunda, la definición de un número real sobre la base de un conjunto de infinitos números racionales. En ambas se introduce el problema del infinito (clásico desde la antigüedad). El éxito del proyecto no se logra plenamente, como bien señala Kneale: "La definición de los números reales por me dio de conjuntos infinitos de números racionales resulta satisfactoria en el sentido de proporcionarnos cuanto cabía esperar del cálculo de números reales y relacionar a este último con el cálculo de números racionales que lo precede. Pero no basta para permitirnos la aritmetización del análisis, si por ello entendemos -como al parecer lo entendía Kr6necker- la reducción de todos los enunciados matemáticos a enunciados acerca de números naturales. Pues un enunciado que se refiera a un conjunto infinito de números racionales no puede ser reducido al estricto sentido en que lo pueda ser un enunciado que únicamente se refiera a un conjunto finito de números racionales dados. Y si abandonamos el programa de una completa reducción tendremos todavía que hacer frente a la dificultad de probar la consistencia de las reglas específicas adoptadas para nuestro cálculo de

números reales. Cómo poder hacer tal cosa sin incurrir en una petición de principios, a saber, la de dar por sentada la existencia de los números que se supone habrían de definir las reglas en cuestión?"[8]. Las observaciones de Kneale son correctas. Pone el dedo en una llaga que atormentó a los principales matemáticos del siglo XIX y del siglo presente.

El segundo proyecto que pretende reducir la aritmética a nociones lógicas es el que adopta como suyo Frege. Es un proyecto que pretende dar respuesta a la pregunta: qué es un número? Es decir, no se trata simplemente de reducir la aritmética a un sistema formal axiomatizado. El objetivo es mostrar que la naturaleza Última de los números es lógica. Aquí aparece un problema evidente: ¿qué en tiende Frege por lógica?. Las definiciones que llegan a establecer sobre el objeto y el carácter de la lógica no son muy concretas. En the Thought: A Logical Inquiry afirma: "The word "true" indicates the aim of logic as does "beautiful" that of aesthetics or "good" that of ethics. All sciences have truth as their goal; but logic is also concerned with it in a quite different way from this. (.. To discover truths is the task of all sciences; it falls to logic to discern the laws of truth"[9].

Continua más adelante: "la order to avoid this misunderstanding and to prevent the blurring of the boundary between psychology and logic, I assign to logic the task of discovering the laws of truth, not of assertion of truth" [10]. Las leyes de la verdad, de las verdades..., son cosas poco claras. ¿Qué es la verdad? ¿De dónde provienen las reglas ontológicas o epistemológicas?. Frege no contesta a estas cuestiones, pero no deja de establecer una orientación metafísica al señalar las verdades como eternas. Es un mal método, este, de recurrir a entidades abstractas e indefinibles para definir otras. Lo "verdadero lo pone Frege en funcionamiento sin ninguna aprehensión: "... it is probable that the content of the word "true" is unique and indefinable" [11]. Y lo llega a establecer si se quiere con precisión en su artículo Negation (publicado por primera vez en Beitrage Zur Philosophie des deutschen Idealismus, vol. 1, en 1919):

> After refuting errors, it maybe useful to trace the sources from which they have flowed. One source, I think, in this case is the desire to give definitions of the concepts one means to employ. It is certainly praiseworthy to try to make clear to oneself as far as possible the sense one associates with a word. But here we must not forget that not everything can be defined. If we insist at any price on defining what is essentially indefinable, we readily fasten upon inessential accesories, an thus start the inquiry on a wrong track at the very outset [12].

En la Introducción a los "grundgesetze" lo plantea de la siguiente forma: "No siempre será posible definirlo todo normalmente, porque nuestro esfuerzo ha de ser precisa mente retroceder hasta lo lógicamente simple, que en cuanto tal no es propiamente definible"[13]. Yo puedo aceptar que en el estrecho terreno de algunos sistemas teóricos específicos sea hartamente difícil definir todos los conceptos y elementos involucrados en el sistema (aunque pienso que las definiciones implícitas no son un desvarío). En lo que frontalmente estoy en desacuerdo es en que no se definan con precisión los conceptos y elementos que se utilizan cuando estos se refieren a cuestiones esenciales de la epistemología y de la ontología, cuando se refieren a la totalidad de lo material y lo social, del conocimiento y práctica científica...; no acerto a comprender, por ejemplo, el significado de la lógica definida sobre la base del concepto verdad-verdadero, sin que éste último sea definido o explicado adecuadamente. Esta actitud metodológica, manifiesta y defendida en Frege en mi opinión es incorrecta y genera problemas filosóficos. El origen en

Frege de esta actitud es probable que esté ligado al carácter formal y abstracto de las principales actividades teóricas que sostuvo. En un sistema formal-axiomático no es necesario definir las nociones básicas, e incluso se establecen axiomas, que son proposiciones no demostrables.

La ausencia, en Frege, de una caracterización adecuada de la lógica es una debilidad que no dejará de manifestarse en el desarrollo del proyecto de la logicización de la aritmética. Es evidente que el concepto de número, como ya lo he analizado, es otro problema de partida del edificio fregeano. Los objetivos epistemológicos y ontológicos que se plantean imbricada y condicionalmente con la "logicización" no aparecen con nitidez y precisión. Es interesante repetir que las concepciones de la lógica de número y de aritmética en Frege plantean la forma específica en que él se dirige a la "logicización". También es interesante mostrar el ligamen de las concepciones de aritmética y lógica de Frege con el proyecto. Ya señalé que él consideraba a la lógica como dedicada a las "leyes de la verdad". A la aritmética la consideraba dedicada a los principios fundamentales de lo pensable, o, como bien lo dice Kneale: "...expresa Frege en otra parte asegurando que las leyes de la aritmética no son leyes de la naturaleza, sino leyes de las leyes de la naturaleza, esto es, principios fundamentales acerca de lo pensable" [14] . Es claro que entre principios de lo pensable y leyes de la verdad, sea lo que signifiquen, "debe" haber una gran identificación.

La afirmación de Frege en Función y Concepto: "La aritmética es lógica extensamente desarrollada, que una fundamentación rigurosa de las leyes aritméticas nos retrotraea las leyes puramente lógicas y solo a tales" [15] debe concretarse de la forma que explica Kneale:"… desea mostrar (Frege) que el lenguaje matemático en términos de números naturales resulta reducible a un lenguaje en términos de con juntos, clases o multiplicidades, que en la terminología de los lógicos constituyen extensiones de conceptos. De ahí que expresamente a firme que los objetos aritméticos son en definitiva objetos lógicos" [16]. El proyecto empieza por tratar de reducir el concepto de orden en una secuencia cualquiera al concepto de secuencia lógica. "...so as to proceed from there to the concept of number" [17], como lo afirma Frege en el prefacio de su *Begriffsscrift*, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thougt, publicado en 1879.

En este punto es interesante mostrar las diferencias del proyecto de "logicización" y los resultados expuestos por Peano en los tiempos de Frege. Para Peano y sus seguidores se trataba de reducir el álgebra y la aritmética a unas pocas elementales ideas lógicas, como: clase, pertenencia de clase, inclusión entre clases, implicación y producto de clases; reducidas a tres ideas matemáticas primitivas: cero, número y sucesor; y a algunas proposiciones. En 1889 publica Peano sus *Arithnetices Principia Nova método Exposita* donde aparecen cinco axiomas sobre aritmética:

(1) 1 es un número

(2) el sucesor de cualquier número es un número

(3) no hay dos números que tengan el mismo sucesor.

(4) 1 no es el sucesor de ningún número.

(5) cualquier propiedad que pertenezca a 1 y asimismo al sucesor de cualquier número que la posea pertenecerá a todos los números.

Estos axiomas serán la base, con modificaciones posteriores, de la "reducción" de Peano. Esta solución de Peano señala la axiomaticidad de la aritmética (y de la matemática en general).

Dedekind había llegado a resultados similares, aunque sin usar el lenguaje de la axiomática, un poco antes que Peano. Estas axiomatizaciones no resuelven sin embargo, la pregunta sobre ¿qué es el número?, una insuficiencia puesto que, como señala Kneale,

> …no da razón alguna de la conexión con el uso ordinario de los numerales imprescindibles en un sistema formal que merezca el nombre de aritmética. Si los signos que representan las nociones de "número", "cero" y "sucesor" únicamente detentarán el sentido que les imponen los axiomas de Peano, se trataría en efecto, de variables susceptibles de ser sustituidas por cualesquiera expresiones que convierten a todos los axiomas en enunciados verdaderos (…).

En pocas palabras, el repertorio axiomático de Peano considerados los axiomas como definiciones implícita únicamente determina las características lógicas comunes a toda progresión"[18]. La observación de Kneale coloca el terreno en el cual Frege dio cuerpo a su proyecto. Frege contrapuestamente a Peano y Dedekind partirá de la definición de los números para extraer de ellos las reglas de la aritmética.

La forma concreta cono Frege trata de mostrar la reducción lógica de la aritmética parte de la definición de número a través de los conceptos de "equinumericidad" y "extensión de concepto". En el Prólogo a los Grundgesetze Frege señala "… los recorridos tienen además una gran importancia fundamental; pues, yo defino el número mismo como una extensión de concepto, y las extensiones de concepto son, según mi concepción, recorridos " [19].En la Introducción a los Grundgesetze afirma: Así quedará establecido definitivamente que la asignación de número contiene una afirmación sobre su concepto. He reducido el número a la relación de equinumeridad y ésta a la aplicación biyectiva. De la palabra "aplicación" puede decirse lo mismo que de la palabra "conjunto". Ambas se usan ahora con frecuencia en la matemática, y en la mayoría de los casos falta una comprensión profunda de lo que realmente se quiere designar con ello.

> Si es correcta mi idea de que la aritmética es una rama de la lógica, entonces habrá que elegir en vez de "aplicación" una expresión puramente lógica. Y escojo la de "relación". Concepto y relación son las piedras fundamentales sobre las que construyó mi edificio" [20].Más concretamente en los Grudgesetze resume en tres definiciones lo que es "técnicamente", un número y sus relaciones: "El concepto F es equinumérico (Gleichzhlig) con el concepto G' significa que 'hay una relación Ø que correlaciona uno a uno los objetos incluidos bajo el concepto G'. El número correspondiente al concepto F es la extensión del concepto 'equinumérico' con el concepto F; n es un número significa que hay un concepto tal que n es el número que le corresponde [21].

El razonamiento fregeano envuelve el concepto de conjunto y de clase, en la orientación que Cantor había suministrado. De hecho, que n sea un número tiene mucha relación a que n sea la cardinalidad, "el número de elementos de un conjunto o clase". Los términos "extensión del concepto" involucran la idea de cantidad, y por qué no de número en resumidas cuentas? Concretizamos: Frege reduce con estas definiciones el hablar de número a hablar de clases. Decir que "n es un número" si "hay un concepto tal que n es el número que le corresponde" significa trasladar nuestros "problemas" de los números usuales sobre las clases. Es una “clasicización” de la Aritmética; que sea “logización” es otro asunto.

Es importante señalar la ligazón entre los resultados de Frege y Cantor para mostrar el contexto teórico en que la “logicización” se plantea. Frege compartió y admiró el mundo de los infinitos de Cantor. En su *Grundlagen* Frege escribía: “Solo recientemente han sido introducidos los Números infinitos en una notable obra de 0. Cantor (Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre, 1883). Por mi parte comparto cordialmente su desprecio por la tesis de que en principio únicamente los Números finitos habrían de admitirse como dotados de realidad. Los primeros no son por cierto perceptibles mediante los sentidos ni espaciales, más de lo que puedan ser las fracciones o los números negativos, irracionales o complejos; y, si restringimos el dominio de lo real al de aquellas cosas capaces de actuar sobre nuestros sentidos o por lo menos de producir efectos cuyas consecuencias próximas o remotas sean percepciones sensibles, ninguno de esos números podría en efecto gozar de realidad. Pero no menos cierto es que no necesitamos recurrir a ningún género de percepción sensible para la demostración de nuestros teoremas.

Coincidiendo, como creo, con Cantor en este punto, mi terminología difiere de la suya en alguna medida. Cantor llama “potencia’ a lo que yo considero un Número, mientras que su concepto de Número envuelve referencia a la idea de ordenación. Pero ninguno de los dos necesitamos de ulteriores extensiones de su significado, dado que ambos admitimos de entrada que el concepto de Número abarca por igual a los números infinitos que a los finitos” [22]. La coincidencia de Frege con Cantor sería mayor de la que establece aquí. La definición de número de Frege y la teoría de las clases o conjuntos de Cantor son muy similares, come bien señala Kneale de la siguiente forma: “. . . la correlación de une a une de que Frege nos habla no es sine aquella relación entre conjuntes que Cantor llama equivalencia, y las novedades contenidas en la obra del primero podrían Ser fácilmente comprendidas en el lenguaje del segundo por medie de los des siguientes enunciados:

I. El número cardinal de un conjunto es el conjunto de todos los conjuntos equivalentes al primero.

II. Para cada uno de los números naturales 0, 1, 2, 3, etc., considerados como conjunto de conjuntos equivalentes, podremos tomar como ejemplares o miembros paradigmáticos ciertos conjuntos definidos en términos puramente lógicos, a saber, el conjunto de las cosas no idénticas así mismo para 0, el conjunto cuyo único miembro es el número O para 1, el conjunto cuyos miembros son los números O y 1 para 2, el conjunto cuyos miembros son los números 0, 1, 2 para 3, y así sucesivamente” [23].

La naturaleza de la aritmética y la “logicización” fueron el eje de las preocupaciones teóricas de Frege la mayor parte de su vida. Podemos afirmar que desde antes del mismo Begriffsschrift el intento fregeano toma lugar. Este último poseía el objetivo de dar un lenguaje completamente formalizado y preciso para expresar las leyes de la lógica. Se trataba para Frege de una monumental obra de organización, creación y amplificación de la lógica existente hasta su tiempo, con el objetivo de poseer una instrumental lógica capaz de permitirle probar sus asertos sobre la naturaleza de la aritmética. Cómo Frege mismo lo establece en el Prefacio de su libro de 1879:

> I first ascertain how far one could proceed in arithmetic by means of inferences alone, with the sole support of those laws of thought that trascend all particulars. My initial step was to attempt to reduce the concept of ordering in a

> sequence to that of]g,4 consequence, so as to proceed from there to the concept of number. To prevent anything intuitive (Anschauliches) form penetrating here unnoticed, I had to bend every effort to keep the chain of inferences free of gaps. In attempting to comply with this requirement in the strictest possible way I found the inadequacy of lenguage to be an obstacle; no mather how less and less able, as the relations became more and more complex, to attain the precision that my purpose required. This deficiency led me to the idea the present ideography. Its first purpose, therefore, is to provided us with the most reliable test of the validity of a chain of inferences and to point out every presupposition that tries to sneak in unnoticed, so that its origin can be investigated [24].

Frege concluye su prefacio reafirmando que "…arithmetic was the point of departure for the train of thought that led me to my ideography. And that is why 1 intended to apply it first of all to that science, attempting to provide a more detailed analysis of the concepts of arithmetic and a deeper foundation for its theorems"[25].

A pesar de que el objetivo de Frege con esta Ideografía era de servirle de medio, los resultados que obtiene para la lógica son gigantescos. Por primera vez aparecen los cuantificadores y las variables ligadas, que permiten desarrollar a Frege la primera teoría coherente de la cuantificación; aparece el cálculo proposicional de funciones de verdad, el análisis de la pro posición como función y argumento en lugar de sujeto y predicado, por primera vez aparece una distinción precisa entre nombres y predicados, predicados de primer orden y de segundo orden; se formaliza la lógica sentencial y se presenta un cálculo deductivo para esta última. El "medio" creado por Frege se convirtió, es necesario afirmarlo, en la obra tal vez de mayor importancia para el desarrollo de la lógica desde el Organon de Aristóteles.

Cuando Frege escribe *Die Crundlagen der Arithmetik*, publicado en 1884, su objetivo es la crítica a distintas posiciones filosóficas sobre los números y la aritmética, al mismo tiempo que definir el concepto de número natural. *Die Crundgesetze der árithmetik* (publicado en dos volúmenes en 1893 y 1903 respectivamente) corresponde a lo que debía ser para Frege la culminación de su proyecto de "logicización". Como he mostrado, todas sus producciones teóricas están regidas por la idea de reducir la aritmética a la lógica.

La "logicización" de la aritmética no había poseído fin intento más gran de que el que Frege le había dedicado. Frege construyó un gigantesco edificio que daba cima a su obra de años. Sin embargo, no habiéndose termina do de imprimir el segundo tono de sus Grundgesetze, uno de sus pocos lectores, Bertrand Russell, descubre una paradoja en uno de los pilares esenciales del edificio. La paradoja aparece precisamente en su noción de "extensión de conceptos", es decir, es una paradoja interna a la teoría de las clases o conjuntos. Frege, en el apéndice, del volumen dos de sus Grundgesetze lo expresa de la forma:

> Nobody will wish to assert of the class of men that it is a man. We have here a class that does not belong to itself. I say that something belongs to a class when it falls under the concept whose extension the class is. Let us now fix our eye on the concept: class that does not belong to itself. The extension of this concept (if we may speak of its extension) is thus the class of classes that do not belong to themselves. For short we will call it the class K. Let us now ask whether this class K belongs to itself. First, let us suppose it does.

> If anything belongs to a class, it falls under the concept whose extension the class is. Thus if our class belongs to itself, it is a class that does not belong to itself. Our first supposition thus leads to self-contradiction. Secondly, let us suppose our class K does not belong to itself; then it falls under the concept whose extension it itself is, and thus docs belongs to itself. Here once more we likewise get a contradiction [26].

En el terreno de la teoría de conjuntos aparecían paradojas. Russell no era el primero en señalarlo. Ya en 1895 Cantor mismo había detectado la que se conoce como Burali-Forti, y en 1889 la que lleva su mismo nombre. En 1905 J. Richard encuentra una mueva paradoja. Años después aparecen las paradojas de Berry y Grelling. Estas paradojas pusieron de manifiesto perturbaciones en la teoría de conjuntos, pero también en la misma lógica. Russell, como señala Kneale, muestra que las paradojas no solo provienen de la teoría de conjuntos:

> En lugar de la clase que se supone habría de contener a todas las clases que no son miembros de sí misma, consideremos la propiedad de ser una propiedad que no ejemplifica a sí misma. Si dicha pro piedad se ejemplifica a sí misma, no podrá entonces ejemplificarse a sí misma; y si no se ejemplifica a sí misma, habrá entonces de ejemplificarse a sí misma. Es claro que la dificultad reviste aquí la misma índole que en la paradoja originaria y, sin embargo, no se ha hablado de clases para nada [27].

La idea de Russell de que de la paradoja se desprendían más de razones lógicas que de las matemáticas, se establecía sobre la observación de la semejanza con la antigua paradoja de Epiménides o del mentiroso.

El "revuelo" causado por la emersión de las paradojas trató de ser sofocado por varios matemáticos y filósofos. Zermelo en 1908 dio una serie de axiomas que salvaban de las paradojas la teoría de conjuntos, reduciendo la existencia de lo que se tome por conjunto, considerando los conjuntos que "no sean demasiado vastos". Zermelo se colocaba esencialmente en el terreno de la axiomatización capaz de resolver los problemas debidos a la existencia de las paradojas, se colocaba en el terreno de la consideración de la teoría de conjuntos como sistema formal. Este terreno de la axiomatización y de los sistemas formales sería desarrollado especialmente por David Hilbert.

En el mismo año de 1908 Russell publica su *Mathematical Logic* as based on the Theory of Types como no intento de eliminar las paradojas por la vía de la eliminación de lo que se llama "círculo vicioso", a través del principio "lo que presupone el todo de una colección no debe formar parte de la colección". Ese año Brouwer, retomando las banderas de Poincaré y Kröcnecker, señala que las paradojas emergen de una mala utilización del concepto de infinito. Brouwer empieza a levantar lo que se llama la escuela intuicionista que parte de una "intuición del tiempo" para definir los números naturales.

Los problemas que emergen con la teoría de conjuntos no deben considerarse como modernos. Son problemas en la línea misma de los planteados frente a las expresiones llamadas por connotación y por denotación. Aquellos lógicos que pensaban haberse librado de las dificultades planteadas por los universales con la utilización de clases han tenido que retroceder asustados ante el nuevo demonio que parece semejar los anteriores. La denotación es una forma de expresión llamémosle concreta, muestra objetos (en sentido general) individualmente. La connotación es una forma de expresión que abstrae, separa. Un conjunto dado por connotación posee sus elementos definidos por un acto de abstracción. Los conjuntos dados por connotación se colocan de lleno en el terreno mismo de los productos de la conciencia y de la abstracción. Cono tales la frontera en que se cruzan las leyes de lo real, material y social no es clara y distinta. La teoría de conjuntos se centra en la característica de la pertenencia. ¿Qué pertenece o no a un conjunto?, es esencial en la definición del conjunto. El "pertenecer" significa en la expresión del conjunto abstracción, o ejemplificación individual, concreta. En este punto intervienen la observación intuicionista: los conjuntos cuyos elementos puedo denotar son esencialmente finitos. ¿Qué sucede entonces, con los conjuntos infinitos en un momento?. Este es un problema esencial para los intuicionistas, que pretenden resolver, entre otras formas, a través de la constructibilidad. La correspondencia con las leyes de lo real, natural y social, del uso de los conjuntos dados por connotación y aquellos infinitos no es un problema que se pueda resolver en el marco de la teoría meramente, sino que está estrechamente ligado a la totalidad de la práctica científica de los hombres y de la sociedad. Es una discusión que no corresponde a este ensayo.

El proyecto de "logicización" de Frege es cuestionado a fondo por la paradoja que descubre Russell. Es lo que señala el mismo Frege, en sus Grundgesetze cuando dice: "What is in question is not just my particular way of establishing artihmetic, but whether arithmetic can posibly be given a logical foundation at ah" [28].

Frege, a pesar del "problemita" de la paradoja, en este período mantiene la convicción de la plausibilidad de la "logicización". Dice en el mismo Apéndice:

> The prime problem of arithmetic may be taken to be the problem: How do we apprehend logical objects, en particular numbers? what justifies us in recognizing numbers as objects? Even if this problem is not yet solved to the extent that I believed it was when 1 wrote this volume never the less I do not doubt that the way to a solution has been found [29].

Whitehead y Russell tratan de seguir el intento fregeano de la "logicización" de la aritmética, a pesar de las paradojas. Las paradojas descubiertas llegan a ser eliminadas bajo la intervención de la "teoría de tipos russelliana", la "teoría ramificada de tipos", así como la introducción del axioma reducibilidad (ligado mejor a situaciones propias de la semántica y la lingüística). La introducción del "axioma de infinitud" tiene por objeto que la "logicización" por él planteada pueda integrar el carácter infinito de la sucesión de los números naturales. El proyecto fregeano continuado por Russell no se lleva a término a través del camino por él seguido. El axioma de infinitud es un axioma extralógico. Pero a-demás la teoría de tipos entraña más problemas, como lo señala Kneale: "…nos encontramos con la dificultad, aún más fundamental, de que parece imposible formular la teoría sin violar de algún modo sus propios requisitos, dados que términos como función, "entidad" y "tipo" han de permanecer en ella invariablemente libres de restricciones en cuanto a su tipo. Cuando decimos, por ejemplo, que ninguna función puede ser significativa mente aseverada de todas las entidades sin distinción de tipo, nuestro propio enunciado envolverá la ilimitada generalidad cuya imposibilidad proclama. Y algo ha de haber también que no funciona en la definición usual de tipo, de acuerdo con la cual dos entidades serían del mismo tipo si una función proposicional significativamente afirmada o negada de la una pudiera también serlo de la otra[30]. Lo que es esencial en el análisis que estamos realizando es señalar el fracaso de los intentos en la orientación Frege-Russell por dar curso a la “logicización” de la aritmética.

Un balance global del desarrollo de los intentos por culminar el proyecto fregeano debe poner de manifiesto lo que ha sido la imposibilidad de hacer reducir las leyes de la aritmética a reglas lógicas. El intento fregeano, como decía, “clasicizó la aritmética, pero condujo la aritmética a un terreno cargado de paradojas como el de la teoría de clases o con juntos. Pero el intento de conducirla a los dominios de la lógica no ha sido resuelto ni por Frege ni por seguidor alguno de la vía por él construida en sus principios. Las razones de este fracaso no pueden partir más que de un análisis que apunte con claridad a definir lo que se entiende por lógica y que delimite sus fronteras con precisión. Ya mencionaba yo, en un principio, como una concepción errónea de la globalidad de la lógica no puede dejar de entrañar consecuencias problemáticas en un proyecto de la naturaleza del por Frege planteado. Kneale en su obra El Desarrollo de la Lógica concluyó sobre la naturaleza de la lógica:

> ...tanto Boole como Frege, al igual que Leibniz antes que ellos, consideraron la lógica como un sistema de principios reguladores de la validez de la inferencia en relación con toda suerte de materias y para toda suerte de contextos, esto es, como una teoría de relaciones tales como las de Aristóteles y Crisipo, consideran, respectivamente, en sus doctrinas de los silogismos o la derivación de esquemas diferenciales (…); no faltan otros elementos en la tradición lógica, pero aquellos son los elementos que los más grandes lógicos de los tiempos modernos juzgaron nucleares y parece razonable decir que el resto de los miembros del cuerpo de la lógica se habrán de articular en torno al cometido vertebral de clasificar y conectar entre sí los principios de la inferencia formalmente válida [31].

De sí Boole y Frege tuvieron la consideración de la lógica como dice es matizable; pero en mi opinión esa supuesta consideración común coloca a la lógica en su verdadero lugar, por lo menos de una forma general. Kneale también concluye la imposibilidad del proyecto fregeano: “. . .el vocablo “lógica” se halla tradicionalmente conectado con el estudio de las reglas de inferencia; y, si resulta extraño aplicar ese vocablo a un sistema axiomático como el de Frege, más extraño resultaría aún aplicarlo a un sistema en el que las consecuencias de los axiomas no sean todas accesibles por inferencia a partir de estas últimas, Y, sin embargo, esto es lo que hizo Frege -como hoy podemos apreciar a la luz del teorema de G6del -al tratar de reducir la aritmética a la lógica. Donde Frege creyó ver una simple diferencia de niveles, tropezamos en realidad con un abismo al que con propiedad cabría nombrar la frontera de la lógica[32]. Esto es esencial: la lógica, como Teoría de la cuantificación..., que es una teoría completa, no puede identificarse con la teoría de conjuntos, que “...no solo (es) incompleta sino que incompletable” [33]; y, además, las leyes de la aritmética no pueden reducirse a combinaciones de inferencias.

El porqué no pueden reducirse a meras combinaciones de inferencias las leyes de la aritmética, que no señala Kneale, es un problema que solo puede resolverse con una justa comprensión ontológica y espistemológica de lo que son la lógica y la aritmética. Las leyes de la aritmética no son estrechamente formales, puesto que son leyes que no corresponden a sistemas de conceptos cerrados sino que son expresión de las leyes del movimiento “abierto” de lo real. Es absurdo epistemológicamente constreñirlas como una totalidad al sistema cerrado de la teoría de la cuantificación. Esta situación muestra los límites claros de la lógica formal como tal. Las leyes de la aritmética son esencialmente ”inductivas’ mientras que la inferenciación se refiere a los procesos de deducción formal. Es obvio que un cuerpo teórico deductivo no puede captar la totalidad de una teoría cuyas reglas son “inductivas.” De ahí, en general, parte la imposibilidad formal y teórica del proyecto de la “logicización” de la aritmética. Los asertos ”inductivos” caen en el terreno de las probabilidades, y de especial importancia, cuando se trata de las ciencias, de la experimentación. Es el terreno del contacto directo de los hombres con lo real natural y social. El determinante concepto de sucesor de un número natural, por ejemplo, solo puede establecerse por una regla derivada en general del devenir de la realidad objetiva. Una proposición general necesaria para que este concepto de sucesor sea deducido formalmente exige ya un marco fuera de las fronteras de la lógica. La inferenciación es un instrumento esencial del conocimiento, indispensable para estructurar los resultados y los hechos producto de la práctica del conocimiento pero profundamente limitada.

En general toda la lógica formal es muy limitada. Esta situación no deja de plantearse cono factor esencial en los problemas que infectan todas las teorías de los sistemas formales.

La visión de la realidad de Frege era idealista. Desde su aproximación a la aritmética hasta su concepción de la lógica se coloca en ese terreno. Frege, es correcto afirmar, colocaba a la lógica en el marco de las reglas objetivas de la inferencia. El desarrollo de su proyecto eso manifiesta. Pero ese desarrollo también señala que Frege no poseía una comprensión acertada de los límites de la lógica, así cono se desprende también la naturaleza de esta tampoco era de su pleno dominio. Lo que he tratado de señalar en este pequeño artículo es que la posición de Frege frente a la aritmética era idealista. Se trata de una concepción incorrecta que se convierte en la principal fuerza motriz de la aprehensión por Frege de un proyecto equivocado desde sus principios, por lo menos de los objetivos que se impone. Es esta visión que da a luz orientaciones erróneas frente a los problemas esenciales del pensamiento moderno, la que es necesario comprender para poder explicar acertadamente la coherencia y estructura de las ideas de Frege.

Frege jugó un papel esencial en los Fundamentos de la Matemática y la Lógica moderna. La riqueza de su pensamiento, no comprendido en la mayor parte de su vida, es extraordinaria. Es tremendamente importante la monumental obra de investigación y reflexión que constituyen su Begriffsschrift, sus Grundlagen y los dos tomos de su Grundgesetze, sus escritos sobre matemática, lógica y lingüística, forman un núcleo del que para bien o para mal se han nutrida gran parte de la gleba de pensadores y filósofos de nuestra época. Era cierto, efectivamente, lo que decía la Universidad de Jena del tiempo de Frege sobre su obra: “. . .carecía de interés para la Universidad”. Se trataba de un juicio sobre la Universidad de Jena, no sobre Frege.

Referencias

- Kneale. (1972)*Desarrollo de la lógica*. Madrid, Ed. Tecnos..
- P.H. *Strawson. Philosophical Logic*. Oxford Readings in Philosophy.
- John P. (1968) *A hundred years of philosophy*. Penguin, pp. 148.
- Frege. (1971). *Estudios sobre semántica*. Barcelona, Ed. Ariel.
- Geach P. y Black M. *Translations from the Philosophical writings of Gottlob Frege*.
- Ibid

Notas

---

[1] Kneale. (1972)*Desarrollo de la lógica*. Madrid, Ed. Tecnos, pp. 418-419.
[2]P.H. *Strawson. Philosophical Logic*. Oxford Readings in Philosophy pp. 35.
[3] John P. (1968) *A hundred years of philosophy*. Penguin, pp. 148.
[4] Frege. (1971). *Estudios sobre semántica*. Barcelona, Ed. Ariel, pp. 7.
[5] John P. (1968). *A hundred years of philosophy*. Penguin, pp. 148.
[6] Frege. (1971). *Estudios sobre semántica*. Barcelona, Ed. Ariel, pp. 127-128.
[7] Ibid, pp. 127-128.
[8] Kneale. (1972). *El desarrollo de la Lógica*. Madrid, Ed. Tecnos, pp. 373.
[9] P.F. Strawson. *Philosophical Logic*. Oxford Readings in Philospy, pp.l7.
[10] Ibid, pp. 18.
[11] Ibid, pp. 19.
[12] Geach P. y Black M. *Translations from the Philosophical writings of Gottlob Frege*. pp. 126.
[13] Frege. (1971). *Estudios sobre semántica*. Barcelona, Ed. Ariel, pp. 161
[14] Kneale. (1972). *El desarrollo de la Lógica*. Ed. Tecnos, Madrid, 414.
[15] Frege. (1971). *Estudios sobre semántica*. Barcelona, Ed. Ariel, pp. 30.
[16] Kneale. (1972). *El desarrollo de lógica*. Madrid, Ed. Tecnos, pp. 417.
[17] Geach P. y Black M. *Translations from the Philosophical writings of Frege*, pp 5.
[18] Kneale. (1972). *El desarrollo de lógica*. Madrid, Ed. Tecnos, pp. 435.
[19] Frege. (1971). *Estudios sobre semántica*. Barcelona, Ed. Ariel, pp. 129.
[20] Ibid, pp. 161.
[21] Kneale. (1972). *El desarrollo de lógica*. Madrid, Ed. Tecnos, pp. 425
[22] Ibid, pp. 409.
[23] Ibid, pp. 431
[24] Geach P. y Black M. *Translations from the Philosophical writings of Gottlob Frege*. pp. 5-6
[25] Ibid, pp. 8.
[26] Ibid, pp. 235.
[27] Kneale. (1972). *El desarrollo de la Lógica*. Madrid, Ed. Tecnos, pp. 608.
[28] Geach P. y Black M. Translations *from the Philosophical writings of Gottlob Frege*. pp. 234
[29] Ibid, pp. 244.
[30] Kneale. (1972). *El desarrollo de la Lógica*. Madrid, Ed. Tecnos, pp. 622-623
[31] Ibid, pp.687.
[32] Ibid, pp.690.
[33] Ibid, pp. 689.