MATEMÁTICA Y ANALITICIDAD

Referencia: 1994. Inédito.

El concepto de analiticidad es vital en la discusión sobre la naturaleza de las matemáticas y en la forma que esto puede afectar la enseñanza de las mismas. Vamos entonces a estudiar esta polémica, y tomar una posición.

Cuando Russell encontró una paradoja en los *Grundgesetze der Arithmetik* de Frege, este último todavía pensaba que una fundamentación logicista de la aritmética era posible. De hecho, intentó un camino de solución que, sin embargo, algún tiempo después se demostraría inválido[1]. En los primeros años de este siglo todavía era posible pensar en la reducción logicista como factible. Russell trató de conjurar las paradojas a través de la teoría de tipos y *Principia Mathematica* representa el más importante intento práctico y técnico por acuñar positivamente esa reducción. Sin embargo, aparte de otras consideraciones epistemológicas y ontológicas que no se pueden evadir en relación con el logicismo[2], la introducción de axiomas no lógicos en la reducción logicista era la evidencia segura del fracaso de sus pretensiones filosóficas. No es extraño entonces que sea el formalismo hilbertiano, con otro punto de partida que acepta esos axiomas y otros entes no lógicos mientras se mantenga la "consistencia" lógica y formal, el que tome las iniciativas y ocupe el "espacio filosófico" después de la salida a flote de las dificultades del logicismo. [Aunque para hacerle justicia a Hilbert, sus ideas se incubaban desde hacía algunos años]. Incluso el intuicionismo, cuyas "peculiaridades" matemáticas[3] lo hacían poco atractivo para la mayoría de matemáticos, empezó a ser considerado como una perspectiva fundacional durante algún tiempo. En los años treinta con los devastadores resultados de Gödel[4] para el logicismo (y también el mismo formalismo), la reducción logicista Frege-Russell había topado con fronteras insalvables.

Las reducciones logicistas de Frege-Russell eran también reducciones "analíticas" de la Aritmética o de las Matemáticas en general, redefiniendo las nociones clásicas de analiticidad. Para Frege analítico equivale a derivable lógicamente[5]. Y para Russell las características lógico-matemáticas debían encontrarse en la reformulación de lo "analítico"[6]. De hecho el proyecto logicista despertó la ilusión de aportar una clara demostración de la analiticidad de las matemáticas, al mismo tiempo que aseguraba la certeza del edificio conceptual matemático. El logicismo parecía la estocada definitiva sobre el cuerpo de la filosofía Kantiana herido por las geometrías no euclídeas. La "nueva matemática" era inaprehensible por lo "sintético a priori", la "intuición" había sido desterrada. Con Frege esto sólo se cumplía para la aritmética, pero con Russell y Whitehead, con algunos procedimientos "sencillos", toda la matemática era "liberada". La matemática aparecía separada de lo sensible y de cualquier referencia a lo "espacio-temporal", aunque éstas fuesen apenas inofensivas categorías innatas y subjetivas. El fracaso del logicismo en sus dos principales etapas fue un duro golpe para la visión analiticista. A partir del fracaso del reduccionismo logicista se hizo difícil sostener ese punto de vista. Para Putnam y Benacerraf para empezar, no esta claro que Kant haya sido refutado y se haya demostrado por la vía logicista la analiticidad de las matemáticas[7]. Según ellos el logicismo parte de una serie de condicionales muy grandes para poder pretender esa demostración[8]. En 1918 Russell pensaba que era necesario hacer una reformulación de la noción de analítico; la derivabilidad a partir de la ley de no contradicción no parecía ser muy adecuada. Russell buscaba con la redefinición de una noción resolver un problema tan importante teóricamente como el de la naturaleza de las matemáticas.

Según Gödel hay que tener cuidado con la definición de analítico para precisar hasta dónde el logicismo ha avanzado[9]. Por que el asunto no es tan claro si analítico se refiere a: "...que una proposición (...) es válida "en virtud del significado de los conceptos que en ellas aparecen", donde este significado quiza pueda ser indefinible (es decir, irreducible a algo más fundamental)"[10]. Pues, termina Gödel: "Parece que todos los axiomas de Principia, en su primera edición (excepto el axioma de infinitud), son analíticos en este sentido según ciertas interpretaciones de los términos primitivos..."[11]. Para Gödel parece entonces se trata también de obtener una redefinición adecuada de la noción de analítico. Cabría no obstante observar que las excepciones a las que se refiere Gödel arriba (axiomas de infinitud y elección) son precisamente de axiomas de existencia; algunos de aquellos que socavan el edificio logicista. Los problemas no se pueden reducir entonces a falta de claridad en las nociones logicistas de clase o concepto[12], el cuestionamiento a la reducción analítica de la matemática es el que está presente.

Para Ayer en su *Lenguaje, Verdad y Lógica*, las cosas están claras: aún si la reducción logicista de las matemáticas (vía Teoría de Clases) no es posible "...sigue siendo cierto que las proposiciones de la matemática son proposiciones analíticas[13]. Para Ayer la matemática es analítica, no dice nada acerca del mundo. La definición de analítico que ofrece es una reformulación particular de la Kantiana (aceptada en general por el positivismo lógico). Ya hablaremos más de eso.

La discusión sobre lo analítico y sintético ha sido constante en la filosofía moderna. Se puede aceptar la distinción o rechazarla. En el primer caso se puede reformular su definición a partir de problemas descubiertos posteriormente. Ya vimos el planteamiento de Ayer. Pap en su *Teoría analítica del conocimiento*, dice que el problema de la definición Kantiana es que: "... el carácter contradictorio de la negación de una frase analítica no siempre puede conocerse inmediatamente"[14]. Para Quine en "Dos dogmas del empirismo": "un enunciado es analítico cuando es verdadero por virtud de significaciones o independientemente de los hechos"[15]. A partir de esta redefinición de la noción Kantiana pasa a concretar el término "significación". Esto lo hace a través del proceso de análisis del concepto "sinonimia" que se refiere al uso de sinónimos en oraciones del tipo "ningún soltero es casado", usualmente consideradas analíticas, aparte de las del tipo "todo soltero es soltero". Quine concluye que la noción de "sinonimia" no satisface en cuanto a la analiticidad supuesta de las primeras oraciones. Es decir: por la vía de la significación la noción de analítico no resulta. A partir de aquí expresa las conclusiones centrales de este artículo:

> "... se presenta la tentación de suponer que la verdad de un enunciado es algo analizable en una componente lingüística y una componente fáctica. Dada esa suposición, parece a continuación razonable que en algunos enunciados la componente fáctica se considere nula; y éstos son los enunciados analíticos. Pero por razonable que sea todo eso a priori, sigue sin trazarse una línea separatoria entre enunciados analíticos y enunciados sintéticos. La convicción de que esa línea debe ser trazada en un dogma nada empírico de los empiristas, un metafísico artículo de fe" [16].

Se trata entonces de un rechazo de la diferenciación.

Resulta tal vez conveniente sistematizar aquí el sentido de la noción de analiticidad, puesto que diferentes sentidos implican diferentes usos de la distinción y diferentes conclusiones teoréticas. Una excelente sistematización es recogida por Jakko Hintikka en su libro *Lógica, Juegos de Lenguaje e Información*. Para este se han usado cuatro sentidos básicos de esta noción:

> "I. Las verdades analíticas son verdaderas en virtud solamente de los significados de los términos que contienen (verdad analítica como verdad conceptual) (...). II. Un paso de argumento (válido es analítico si la conclusión es una suboración de una de las premisas (...). III. Un paso de argumento (válido) es analítico si no introduce nuevos individuos en la discusión (...). IV. Un paso de argumento (válido) es analítico si la información transmitida por la conclusión no es mayor que la

información transmitida por las premisas (verdad analítica como verdad tautológica)[17]"

A su vez, cada uno de estos sentidos posee diferentes variantes. Para Hintikka, el primer sentido no es satisfactorio. Las proposiciones de la lógica deóntica y la lógica epistémica (en su opinión analíticas) quedarían por fuera[18]; así como que esta restringe inadecuadamente la noción de "concepto" al de "concepto general".[19] Señala, también, que es un sentido alejado del que usó el mismo Kant. Para evidenciar eso, recuerda que los juicios sintéticos a priori son una parte decisiva de la epistemología Kantiana, y que con la reducción "verdad conceptual = verdad analítica", estos desaparecerían simplemente.

Una buena parte de los filósofos contemporáneos ha usado el sentido I, o una combinación de los sentidos I y IV. La realidad es que toda esta distinción (y a pesar de las importantes implicaciones generales filosóficas que tenga) ha girado en torno al carácter y naturaleza de las matemáticas (ontológica y epistemológicamente). Ya sea que se afirme un racionalismo platonista o un empirismo lógico la aproximación a las matemáticas ha tendido a considerarlas como proposiciones que no informan nada sobre el mundo material y que sus verdades se aprehenden estrictamente a través de la mente. En el Logicismo, el concepto de analiticidad es una clásica variante del sentido I (asume simplemente que las proposiciones de la lógica y sus aplicaciones son analíticas: la reducción logicista es, por definición, analiticista).

Según Hintikka, la posición de Kant sobre las matemáticas era acertada, perfectamente reintegrable en el mundo actual de la lógica, y su sentido de analiticidad se encontraría en algún lugar entre los sentidos III y IV mencionados[20].

Kant pensaba que lo esencial de las proposiciones de las matemáticas era la introducción de construcciones (modelo obtenido de la geometría). Esto es lo que haría a sus juicios sintéticos. Estas construcciones son la exhibición a priori de intuiciones correspondientes al concepto en juego. Una intuición es para Kant la representación de un individuo (en matemáticas, por ejemplo, de un concepto individual como un triángulo)[21].

Para Kant, un paso de argumento (válido) sería sintético si introduce nuevos individuos. Para Kant, la naturaleza de las matemáticas era especial, no podrán sus verdades ser comprendidas por una mera inspección mental ni por una mera cadena lógica. La prueba lógica de un resultado matemático no era su esencia. Todo un proceso mental constructivo previo era lo que le daba su auténtica realidad. Es esto lo que estaba presente en el sustrato de la distinción Kantiana. Una reformulación de la misma debe entonces valorarse a partir de su fuerza explicativa en el terreno que intelectualmente le dio origen. Es decir, una reformulación de la distinción debería ser capaz de generar una mejor comprensión del carácter y naturaleza de las matemáticas en particular.

Si las matemáticas se consideran analíticas en el sentido I, proposiciones triviales de la lógica y proposiciones complejas de la topología o el análisis diferencial estarán en el mismo estrato, digámole, epistemológico. Es claro que este sentido, como el sentido IV, a pesar de la "belleza" de la reducción radical, no provee una visión que realmente especifique o concretize lo que es o lo que no es la matemática. Decir que no brinda información del mundo real, o decir que solo basta la mera comprensión (sea esta cual sea) para aprehender sus verdades, no pareciera enriquecer nuestra aproximación teórica. Por lo menos en Kant, la noción de "sintético a priori" expresa ya una distinción, un nivel de especificidad, un nudo de realidad diferente en la esencia de las matemáticas. A veces el reduccionismo (ontológico y epistemológico) provoca obstáculos teóricos para la comprensión de la infinita diversidad de lo real.

En efecto, la esencia de las matemáticas no es la prueba formal (necesaria por diferentes razones) ni las cadenas (formalizadas axiomatizadas, o no) lógicas. Afirmo, al igual que Kant y Hintikka, el carácter sintético de las matemáticas (en general) un sentido III. Es decir, la necesidad de hacer intervenir procesos constructivos en donde nuevos "individuos" aparecen en el camino. En Matemáticas se debe ir "más allá de las premisas". Como dice Hintikka "el que no logremos percibir directamente las conclusiones de un argumento lógico en las premisas no se debe simplemente a cualesquiera obstáculos que puedan nublar nuestra visión mental"[22]. Puede ser el reclamo de un proceso de construcción mental indispensable.

El sentido "conceptual" de la analiticidad encierra problemas adicionales a los mencionados. Como sugiere el razonamiento de Quine (en el artículo citado), siempre es posible hacer ajustes en el sistema conceptual escogido para obtener que una proposición sea analítica (es decir por virtud de los conceptos involucrados). Se puede hablar como Barker (en su *Philosophy of Mathematics*) de un "contexto abierto de lenguaje"; o pedir para su validez, como Alan Pasch, que la distinción se haga en el contexto de un lenguaje artificial.

Se puede preguntar en qué momento los conceptos involucrados hacen analítica una proposición y cuándo los mismos la hacen sintética (o mejor viceversa). ¿Cuándo la verdad de una oración se deriva de la estructura (momentánea) del lenguaje, o cuándo no? En todo este territorio, sin embargo, donde no dejan de darse interesantes implicaciones filosóficas, una compleja componente de convencionalismo está presente. Este no pareciera ser el signo teorético más alentador para seguir por ese derrotero.

El conocimiento "interesante" es el sintético (y en esto Kant no se equivocaba). Aunque presente en el sistema del conocimiento científico lo analítico no es esencial (en el sentido III); Lo "sintético" realmente expresa el carácter edificante de la construcción mental, la fuerza de la mente en el proceso cognoscitivo. Esto no es sin embargo para apuntalar una visión apriorista. Todo lo contrario. Creo, de una u otra forma, que la "construcción a priori de conocimiento" está sumergida en la totalidad de un proceso que exige el contacto sensorial con la realidad independiente del sujeto. Que lo sintético a priori, para referirnos a la amplísima diversidad de lo constructivo intelectual, puede resultar ser la mejor clave para la comprensión del conocimiento en general. El conocimiento es fusión de la acción del sujeto y la del objeto de manera concreta y precisa. La construcción mental (mejor dicho: los diferentes tipos de construcción mental), que en buena parte se puede apreciar en la introducción de "individuos", se concatena con el influjo de lo sensorial-empírico. Las diferentes ciencias (o "pedazos" particulares de ellas) implican diferentes y determinadas formas en las que la mencionada "fusión" epistémica se da. La estructura del conocimiento debería buscarse en el entramado complejo de estas condiciones. La noción de "sintético" entonces, en estos términos abarcaría el territorio general del conocimiento.

Para Kant las matemáticas eran conocimiento a priori. Su posición era racionalista y apriorista. Esto estableció límites, en mi opinión, a una comprensión más adecuada de las matemáticas, de lo "sintético" y del conocimiento en general. Yo afirmo la intervención de la construcción y de la intuición en las matemáticas, pero esta intuición posee un carácter sensorial preciso, y esta construcción descansa en una base material. Las matemáticas y el conocimiento en general son el resultado de un complejo proceso de interrelaciones entre el sujeto y el objeto epistémicos, en el que ambos juegan papeles activos. En este terreno, la distinción a priori-a posteriori concebida en términos tradicionales me resulta insuficiente (poco útil y dinámica); y la posibilidad del conocimiento a priori aparece entonces como un error de método.

El fracaso de la reducción logicista de las matemáticas supuso un fracaso de la pretensión analiticista en las mismas. Sin embargo, al igual que lo abortado solo fue un proyecto específico de reducción logicista, igualmente solo fue abortado un proyecto específico de analiticismo en las matemáticas. Lo que estaría por verse es cuál fue el impacto histórico del fracaso del Logicismo en los fundamentos filosóficos de aquellas aproximaciones teóricas que han afirmado la reducción analiticista Aquí habría que decir que: a pesar de este tipo de fracasos teoréticos, (y aún más: de aquellos como el que implican los resultados de Gödel de los treinta para el Racionalismo y el apriorismo), la filosofía contemporánea de las matemáticas ha sido incapaz de alejarse de la inercia de las ideas y opiniones tradicionales. Volvemos a insistir en que una buena dosis de audacia intelectual y renovación conceptual requiere la actual reflexión sobre las matemáticas.

NOTAS

[1] Cf. Quine W.V.O. "On Frege's Way out" en Klemke, Ed. (edit). *Essays on Frege*. Illinois: University of Illinois Press, 1968, p.492.
[2] Cf. Ruíz, Angel. "La aritmética en Frege: una Introducción al Logicismo*". Revista de Ciencia y Tecnología*, Univ. de Costa Rica, 8 (1): 111-145, 1984.
[3] Cf. Ruíz, Angel. "El factor "paradojas" y el factor "Gödel" en los Fundamentos de la Matemática". *Rev. de Ciencia y Tecnología,* Univ. de Costa Rica,. 9 (1,2): 97-108, 1985.
[4] Cf. Ruíz, Angel. "Implicaciones teórico-filosóficas del teorema de Gödel en el paradigma racionalista de la reflexión sobre las matemáticas". *Revista de Filosofía,* Universidad de Costa Rica, XXIII (58), 183-194, 1985.
[5] Frege, Gottlob. *Conceptografía. Los funadmentos de la aritmética. Otros Estudios filosóficos.* Trad. Hugo Padilla. Mexico: UNAM, 1972. p.117.
[6] Russell, Bertrand. *Introducción a la filosofía matemática*. Trad. Juan Molinari. Buenos Aires: Losada, 1945. p.283
[7] Putnam, Hilary & Beracerraf Paul (Edit) *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*. New Jersey Prentice-Hall, 1964. p.10
[8] Cf. *Ibid*. p.10-11.
[9] Gödel, Kurt. *Obras Completas.* Trad. Jesús Mosterín. Madrid: Alianza Editorial, 1981.
[10]*Idem*.
[11] *Ibid*. pp 324, 325.
[12] Cf. *Ibid*. p.325
[13] Ayer, A.J. *Lenguaje, Verdad y Lógica*. Trad. Marcial Suárez. Barcelona: Ediciones Martínez Roca, S.A., 1971.
[14] Pap, Arthur. *Teoría analítica del conocimiento*. Trad. F. Gracia Guillén. Madrid: Editorial Tecnos, 1964. p.275
[15] Quine, Willard van Orman. *Desde un punto de vista lógico*. Trad. Manuel Sacristán. Barcelona: Ediciones Ariel, 1962.
[16] Ibid. p.70.
[17] Hintikka, Jakko. *Lógica, Juegos de Lenguaje e Información*. Trad. Alfonso García. Madrid: Editorial Tecnos, 1976. pp 174-176.
[18] Cf. *Ibid*. p.156.
[19] Cf. *Ibid*. p.165.
[20] Cf. *Ibid*. p.173.
[21] Cf. *Ibid*. p.252.
[22]Cf. *Ibid*. p.250.