MATEMÁTICAS, CIENCIA Y SOCIEDAD

Referencia: año 2001. En Vega, M. & Maldonado, C.E. & Marcos, A.: *Racionalidad científica y racionalidad humana*. Valladolid, España: Universidad de Valladolid, Universidad El Bosque Colombia, 2001.

¿Quién puede ocultar que existen problemas en las matemáticas escolares de la mayoría de nuestros países? Las promociones persistentemente poco positivas constituyen apenas una muestra. ¿Acaso no existe un "extrañamiento" bastante pronunciado en nuestra ciudadanía en torno a las matemáticas? ¿Una sensación que tal vez llega al temor? Y, al mismo tiempo, ¿quién puede negarle importancia a las matemáticas en las ciencias y la tecnología modernas? Nadie duda que se trate de un auténtico fundamento de nuestro conocimiento y nuestra manipulación de la realidad. Es un asunto anclado en los orígenes íntimos de la ciencia. Con su *empirismo* Bacon fue profeta de la *nueva ciencia*, pero también fueron sus profetas Galileo y Newton, quienes hicieron de las matemáticas instrumento privilegiado para la explicación científica. Sin duda: la conjunción simbiótica de indagación empírica y descripción matemática es la *quintaesencia* de la ciencia natural. Entonces llegamos a una conclusión de entrada: las matemáticas, por un lado despiertan frustración, temor y hasta rechazo, pero por el otro generan estima, reconocimiento de su valor y de su necesidad intelectual. ¿Un dilema? O, tal vez, ¿un desafío?[1]

¿Cuál es el origen de esta tensión social "temor-aceptación"? ¿Cuáles son sus perspectivas? ¿Se podrá abandonar? Y más aun ¿qué hacer con las matemáticas escolares y, por qué no, con las universitarias? El hablar de las matemáticas no es algo sencillo. Ya no sólo en la escala de los problemas nacionales o regionales, sino en aquellos planos propios del pensamiento más general, incluso de la filosofía. ¿Por qué las matemáticas han ocupado ese lugar central y creciente en la explicación científica de la realidad?, ¿por qué esta disciplina considerada por algunos un mero "lenguaje" ha resultado tan decisiva para el progreso cognoscitivo? Las preguntas son muchas: ¿son las matemáticas una ciencia?, ¿existe de verdad la llamada *armonía* entre matemáticas y realidad, como podrían sugerir los pitagóricos?, ¿se podrá establecer para las matemáticas un "criterio de demarcación" que nos distinga lo que es y no es ciencia? Sobre estas interrogantes las respuestas siguen siendo muchas, y no dejan de tener importancia epistemológica, por lo tanto para la educación y, entonces, para aquellas dimensiones nacionales fundamentales para el progreso colectivo. ¿Cómo se conecta todo esto con esa contradicción entre temor y reconocimiento, rechazo y admiración? Nuestro escrutinio no apunta hacia la psicología social, sino más bien hacia la indagación educativa, cultural y filosófica. Un lugar privilegiado ocupará en este trabajo la reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas.

Si analizamos la evolución de las matemáticas escolares en los últimos 40 años, vemos que se han dado razones para enfatizar el polo de temor y rechazo sociales hacia éstas. Las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje[2] se vieron condicionadas en América Latina y en otras partes del mundo por una reforma realizada en los años sesenta en casi todos nuestros países, que modificó *curricula*, programas, métodos, objetivos y la visión de la naturaleza de las matemáticas: las llamadas "matemáticas modernas" buscaban transformar el carácter anticuado, *calculístico*, *memorístico* y "poco general" de las matemáticas enseñadas en primaria y secundaria. Sus énfasis fueron la teoría de conjuntos, las estructuras *algebraicoformales*, y las generalizaciones abstractas. En América Latina, las matemáticas se cargaron de esa ideología y de una manía por un "purismo" matemático que apuntaló un distanciamiento de las matemáticas con relación a las ciencias, la tecnología y la economía. La reforma contribuyó a uno de los principales defectos de la ciencia latinoamericana: el *academicismo*.

La reforma nació como una posible solución de un problema importante para la educación matemática: cerrar la distancia entre la práctica matemática de los investigadores profesionales universitarios y la matemática en la primaria y la secundaria. Por medio del lenguaje de conjuntos y con recursos tomados de las nuevas matemáticas quisieron integrar las matemáticas como una sola disciplina: el paso de *las* matemáticas a *la* matemática. La reforma se inició en Europa (especialmente Francia) y los Estados Unidos; luego se extendería a América Latina y a otras latitudes. Fueron los textos y los cambios curriculares los principales mecanismos para empujar la reforma.

Este movimiento internacional por la implantación de nuevas matemáticas quería enseñarlas como una disciplina integrada por conceptos unificadores de los conjuntos, relaciones, funciones y operaciones, las estructuras fundamentales de grupo, anillo, cuerpo y espacio vectorial, y con la rigurosidad del llamado método "axiomático". Otras propuestas eran: adoptar el simbolismo moderno, dar mayor importancia al empleo de gráficas, la eliminación de gran parte del álgebra tradicional; algo sumamente grave: la modificación y prácticamente eliminación de la geometría euclidiana tradicional. Un famoso grito de guerra de los reformadores fue: *"Abajo Euclides".*

En los fundamentos de esa reforma pesó mucho el grupo francés llamado Nicolás Bourbaki, conformado por brillantes y prestigiosos matemáticos con una gran proyección internacional. Como decía

Kuntzmann: en general los cambios estuvieron bajo el comando de matemáticos con poco o ningún interés pedagógico.[3]

Las ideas que buscaron justificar esta reforma conectaban con las ideas dominantes de siempre: el racionalismo y el énfasis excesivo de lo axiomático en la naturaleza de las matemáticas. Pero, además, fue realizada por especialistas que a la vez que no atribuían importancia a la pedagogía eran portadores de ideas erróneas sobre las matemáticas. Estas ideas todavía son importantes en el horizonte intelectual, aunque han sido ampliamente criticadas en la comunidad matemática internacional.[4]

Si estudiamos el asunto de una manera general, la implantación de estas reformas siguió un *patrón común* en los países periféricos: un impacto que no es realizado a través de meras ideas, sino de individuos y organismos precisos. En nuestro caso, el *Comité Interamericano de Educación Matemática* se encargó de la transmisión. Casi todos los matemáticos asumieron esta tarea; las universidades y las autoridades educativas la apoyaron. Aunque los ritmos fueron distintos en cada país el patrón fue el mismo. Todo en el mundo de las matemáticas se vio condicionado por este proceso.

No dejaron de existir en todo esto algunas razones políticas: el *Sputnik* soviético (primer satélite en el espacio) preocupó a las esferas políticas de Occidente. Había que acelerar en ciencias, tecnología y matemáticas para competir: eran los tiempos de la Guerra Fría. La OEA, la *National Science Foundation* de los Estados Unidos y los gobiernos latinoamericanos asumieron compromisos políticos y económicos. La reforma de las matemáticas les "caía al pelo", o el contexto político internacional "caía al pelo" para la reforma.

Las consecuencias de esta reforma fueron muchas, no todas negativas, pero aquí deseo subrayar que promovió mayor rechazo, temor e incomprensión de las matemáticas en la cultura y educación.

A partir de los años setenta se inició un fuerte proceso de distanciamiento de la comunidad internacional de educadores de la matemática con relación a las premisas y objetivos de la reforma. En los años ochenta, la nueva dirección se ha orientado hacia la promoción de los aspectos *constructivistas* y otros relacionados con el mundo empírico de las matemáticas. En los últimos años: dos corrientes epistemológicas han dominado la comunidad de educadores de las matemáticas: el *constructivismo* y la perspectiva *sociocultural* (el "*socioculturalismo*"). Las diferencias entre los términos no son meras sutilezas lingüísticas sino que obedecen a dos enfoques diferentes. Por un lado, para el constructivismo clásico la experiencia de aprendizaje se realiza en un proceso en el que se enfatiza la acción del sujeto, en una experiencia eminentemente personal. En la segunda aproximación el énfasis se pone más bien en el influjo de la cultura, el medio social en el que se realiza la experiencia educativa.

La primera visión se sitúa en la tradición piagetiana, en la que el sujeto construye el conocimiento como un proceso de *adecuación* y *adaptación* al mundo circundante en una experiencia individual. Más recientemente las principales definiciones de esta visión han sido condensadas, por ejemplo, por von Glaserfeld en varios estudios seminales publicados en 1984[5], 1987[6] y 1989.[7]

En la visión sociocultural se asume un individuo que está inmerso en un medio social y cultural que es decisivo para la práctica educativa, que influencia y determina hasta cierto punto las condiciones de esa práctica. Es claro que una de las tradiciones ideológicas y filosóficas que más ha puesto en relevancia el papel de lo social y cultural en el conocimiento es el marxismo. Para el marxismo la ciencia y el conocimiento deben estudiarse como fenómenos sociales, y las condiciones sociales (normalmente las *macrovariables*) terminan determinando el curso de la práctica científica. Por ejemplo, en la disciplina de la Historia de la Ciencia fueron intelectuales de corte marxista los que más influencia tuvieron en las primeras fases del llamado *Externalismo* en los años 30. Por eso no resulta extraño que muchas ideas que se han usado en esta corriente *socioculturalista* en la reciente educación matemática posean la influencia del soviético Vygotsky así como de otros teóricos (como V. V. Davydov[8], A. N. Leontev[9], y Galperin[10]).

Las implicaciones de ambas visiones epistemológicas sobre la enseñanza son muy grandes, y aunque no se puede decir que exista una correlación mecánica entre una visión epistemológica y una acción educativa precisa, muchas consideraciones en la educación manifiestan este tipo de influencias.

Ambas orientaciones afirman una visión más relacionada con el entorno sobre la naturaleza de las matemáticas. Se trata de un nuevo camino que apenas está empezando a dar sus frutos y que tomará mucho tiempo para definir su rostro completamente; pero no hay duda: los principales esfuerzos en la comunidad de educadores de las matemáticas se colocan dentro de esta perspectiva teórica.

Ahora bien: ¿es posible atribuir la tensión temor-aceptación solamente a una orientación educativa en los últimos 40 años? Es evidente que no. El asunto tiene que ver con la percepción sobre la naturaleza de las matemáticas, pero además, en el fondo, sobre lo que éstas son. Sobre su percepción: las ideas dominantes hasta nuestros días sobre las matemáticas siempre pusieron énfasis en sus aspectos más abstractos, deductivos, incluso axiomáticos y formales, debilitando los intuitivos, vitales, heurísticos, concretos. La misma ideología de las "matemáticas modernas" conectaba íntimamente con el *racionalismo*:

una tendencia epistemológica que enfatiza la razón en los criterios de verdad en el conocimiento. Esta se contrapone al *empirismo* que afirma que se dirime la verdad de una proposición a través de la experiencia sensorial. Para el racionalismo la mente produce verdades *a priori*, absolutas e infalibles. Otra de la ideas que se ha incorporado dominantemente en la concepción de las matemáticas es la que asume su carácter fundamental como *axiomático y formal:* la construcción y la validez de las matemáticas dadas por procesos mentales y su configuración en esencia axiomática y formal; obviamente la experiencia sensorial queda aquí excluida. La realidad es que este es un asunto viejo. Las matemáticas han sido vistas persistentemente como el paradigma del conocimiento verdadero: más aún, la prescripción para establecer la verdad y la certeza. Y en esta percepción existen influjos históricamente decisivos: uno de ellos los *Elementos* de Euclides hace más de 2000 años. Su organización deductiva y axiomática penetró todas las épocas siguientes para definir lo que se ha pensado sobre la naturaleza de las matemáticas. Recuérdese que el gran Newton en su *Principia* e, incluso, el filósofo Spinoza en su *Etica,* acudieron a la forma de exposición euclidiana para buscar "fortalecer" sus argumentos. Ya abundaremos sobre estos asuntos.

No es extraño que con el distanciamiento en la educación de la ideología de las “matemáticas modernas” se haya ido desarrollando una renovación del pensamiento sobre la naturaleza de las matemáticas, que busca recuperar las dimensiones empíricas y sociales de las mismas. Y muy especialmente el carácter *histórico* de las construcciones matemáticas. Esto último es esencial: las aproximaciones históricas permiten evidenciar el *rostro humano* de las matemáticas; permiten resaltar su *naturaleza social*, *temporal*, *concreta*. En nuestra opinión, el incremento de la presencia y uso de la historia como un recurso decisivo en la enseñanza de las matemáticas, por ejemplo, es un signo del avance de visiones filosóficas que se alejan de los paradigmas dominantes del pasado: la existencia de modificaciones en la percepción que se tiene sobre la naturaleza de las matemáticas. ¿Hasta dónde esto ha evolucionado?, ¿existe una visión diferente de recambio sobre la naturaleza de las matemáticas?, ¿cuánto terreno ha ganado una visión empirista y constructivista? Es algo difícil de asegurar. Pero la evidencia se puede encontrar en las publicaciones y en las reuniones internacionales.[11]

¿Cuál ha sido la percepción filosófica sobre las matemáticas en el mundo occidental? Ya en los orígenes de la ciencia griega, con los jónicos que pretendían una explicación naturalista de la realidad, los pitagóricos afirmaban la realidad de acuerdo a principios matemáticos, y también decían que los números y sus relaciones subyacen y muestran el orden[12] de la naturaleza. Es decir: *matemáticas y realidad "de la* *mano"*. Poco tiempo después, Platón sostenía un mundo de objetos *aprehendibles* solamente por la razón e independiente de la mente individual: la realidad material era apariencia, inseguridad, cambio. Pero aún en Platón existía armonía: el mundo material estaba determinado (aunque imperfectamente) por esa realidad.[13] Una visión diferente ofrecía Aristóteles: los objetos matemáticos como "universales", entes presentes en muchos. Para él: las cosas materiales son la primera substancia de la realidad, y los "universales" están en las cosas. Para Aristóteles, entre las proposiciones matemáticas y la naturaleza hay correspondencia por ser éstas *abstracciones* de la naturaleza.

La historia siguió, solo que a grandes saltos: de la Edad Media la "armonía" griega salió convertida en la idea de que Dios creó la naturaleza; pero había un detalle significativo: ésta poseía un orden intrínseco matemático. Las matemáticas mostraban la creación divina. Los nuevos tiempos, la nueva filosofía y la cosmología empujaron entonces a otras posiciones pero sin abandonar totalmente el manto teológico: para Descartes, por ejemplo, las nociones de las matemáticas eran "innatas", intuitivas, pero colocadas por Dios en las mentes. El gran Leibniz, uno de los creadores del Cálculo en el siglo XVII, tampoco se separó de ese manto: las leyes de la matemática y la naturaleza poseen una armonía *preestablecida por designio divino*. Para éste el conocimiento era *innato*. Fue Kant quien ya avanzó en una posición tal vez más "moderna", pero *apriorística*; la verdad de las matemáticas no a través de la experiencia, sino por medio de una intuición *espaciotemporal*: el orden y la racionalidad que creemos externos están dados por lo interno, por el sujeto. La "armonía" no es aquí designio divino; se trata de una formulación *subjetivista* pero "humana". Aquí estamos en los fundamentos del racionalismo de la modernidad. Y encontramos armonía entre matemáticas y realidad.

Para la otra tradición epistemológica de la *modernidad*, el *empirismo*, las cosas son diferentes. Para una de sus variantes, el *inductivismo* en el siglo XIX (Mill), no hay realmente armonía preestablecida. Las verdades de las matemáticas son generalizaciones inductivas de la experiencia; eso explicaría su correspondencia con el mundo. Claro, ya para nosotros: este tipo de enfoque no explica la comprobada correspondencia entre teorías matemáticas (no simples generalizaciones) y el mundo; sabemos que las teorías se aplican o, incluso, se adelantan a la experiencia. Ya metidos en el siglo XX, se buscó entender la matemáticas de otra manera al racionalismo y al *inductivismo*: el empirismo lógico, por ejemplo. En una de sus variantes teóricas: las matemáticas no se refieren al mundo, su naturaleza es *sintáctica* y *convencional*. Aquí tampoco hay "armonía preestablecida", solamente "adecuación" de un lenguaje al conocimiento del mundo. En esta visión moderna las matemáticas no son capaces de producir auténtico conocimiento del mundo. Se trata algo así como una "semántica no referencial". A pesar de lo persuasivo y moderno de este enfoque, nos resulta difícil aceptar que éste permita explicar la naturaleza de la construcción matemática y, en particular, su aplicabilidad en el mundo de la experiencia. Volveremos a esto dentro de un marco de explicación mejor.

Desde finales del siglo pasado y durante las primeras décadas del presente, la reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas tuvo un gran desarrollo. Varias tendencias emergieron entre los matemáticos y filósofos. Las principales son las que se identifican con los nombres: *logicismo*, *intuicionismo* y *formalismo*. La primera aproximación afirmaba que las matemáticas se podían reducir a la lógica. Sus figuras más representativas fueron Gottlob Frege[14] y Bertrand Russell (para Frege se reducía la aritmética, para Russell toda la matemática). Para Frege, existían dos tipos de procesos para justificar las matemáticas: los *a priori*, y los *a posteriori*. Los segundos estaban excluidos. Entre los primeros Frege encontraba dos opciones: la aritmética se deriva de la lógica (más algunas definiciones del vocabulario aritmético) o se funda en la intuición (como en Kant). En esa dicotomía él escogía la primera opción. Este gran pensador creía que las matemáticas poseían contenido: objetos abstractos, que no estaban en el espacio ni en el tiempo; es lo que se suele llamar con el nombre de *platonismo* en las matemáticas.

Otra aproximación teórica afirmaba, contrariamente a Frege, que las matemáticas no poseen contenido (ni abstracto ni mucho menos empírico): el *formalismo*. Algo así como que se trata de un juego formal sin un significado. Su preocupación era esencialmente demostrar la consistencia (ausencia de contradicción lógica) de las matemáticas a través de métodos precisos (finitos). El insigne matemático David Hilbert fue su máximo exponente.[15] En realidad, Hilbert planteaba la existencia de objetos precisos para las matemáticas; decía: "... en el principio (...) era el signo". Es decir: los signos podían ser considerados objetos de las matemáticas.

El tercer enfoque buscaba hacer las matemáticas de otra manera, con base en una intuición *temporal* (como en Kant pero sin la intuición *espacial* de aquel), para lo que se veían obligados a rechazar varias partes[16] de las matemáticas clásicas (porque las demostraciones que aceptaban únicamente los *intuicionistas* no asumían el infinito actual ni la ley lógica del *tercero excluido* de manera arbitraria[17]). Insistieron en la idea de crear matemáticas *constructivistas*, con métodos *finitistas*. Con antecedentes en Kant y el matemático Kronecker, su figura principal fue el matemático holandés L. E. J. Brouwer[18], aunque A. Heyting[19], tiempo después, jugó un papel importante en este enfoque. El gran matemático Poincaré también se asocia a este tipo de posiciones. Muchas veces se usa también el término “constructivismo” para referirse a estos intentos fundacionales en busca de reconstruir las matemáticas sin contradicciones.

La preocupación común a estas tres aproximaciones teóricas era buscar una *fundamentación de las matemáticas* que las librara de las contradicciones y paradojas que se habían filtrado desde el siglo anterior: hacer matemática *segura, infalible*.

En los años 30 estas pretensiones tuvieron una importante llamada de atención: los trabajos del famoso lógico austríaco Kurt Gödel. Hilbert había pretendido la formalización[20] de la matemática clásica (alguna gente creyó, incluso, que la naturaleza última de las matemáticas podían ser los sistemas formales) y demostrar la consistencia de los sistemas formales que creaba (la versión más madura de su proyecto la condensó en 1926[21]). Gödel descubrió que aquellos propósitos no podían llevarse a cabo, incluso cuando la parte de las matemáticas en consideración era la aritmética de primer orden. Demostró, entonces, que no era posible asegurar la consistencia de una teoría matemática (suficientemente amplia para contener la teoría de números).[22] Puesto de la manera más general, estos resultados golpeaban el planteamiento original de proporcionar una fundamentación *a priori* a las matemáticas.

Algunos autores asocian todas estas pretensiones con el término *absolutismo:* la visión *absolutista* en las matemáticas afirma que éstas están constituidas de verdades ciertas e incuestionables: absolutas. El conocimiento matemático sería entonces el campo único de conocimiento cierto (además de la lógica y las proposiciones verdaderas en virtud del significado de sus términos, como por ejemplo "todos los casados no son solteros"). Son los métodos deductivos los que permiten garantizar la verdad de las proposiciones matemáticas. Para la visión absolutista las matemáticas están libres de error: sus verdades son infalibles. Entonces, con este nuevo lenguaje: los problemas con las paradojas de la teoría de conjuntos, o los del formalismo con los resultados de Gödel, podemos decir que constituyen dificultades para las pretensiones del absolutismo en las matemáticas.

La visión de Frege que se negaba a fundamentar las matemáticas en la intuición, su rechazo del empirismo en éstas, y su idea que las proposiciones de las matemáticas no poseen significado, fue asumida como suya -más o menos- por uno de los grupos más influyentes en la filosofía del siglo XX: el *neopositivismo*. En etapas diferentes, fueron ellos que concibieron el cuerpo de las matemáticas y la lógica como aquel que elabora las convenciones que subyacen el lenguaje; la verdad de sus proposiciones se encuentra gracias al significado de sus términos. Este fue en esencia el enfoque de Carnap (1939), Ayer (1936) y Hempel (1945). A ellos nos referíamos al principio. El marco general de estas ideas es, entonces, también el del absolutismo en las matemáticas.[23]

Sobre estos asuntos giraría mucho del *microcosmos* de la filosofía de las matemáticas durante este siglo. De hecho, normalmente muy alejada de la práctica efectiva de los matemáticos y los científicos; y sin relación con asuntos del tipo ¿qué es y cómo progresa el conocimiento matemático?, ¿qué hace que unas teorías matemáticas sean mejores que otras?, ¿cuál es el sentido de las explicaciones matemáticas? Más alejada todavía de temas como ¿cuál es la naturaleza social de los procesos de validación matemática?, y ¿cuál el fundamento social y psicológico de la construcción matemática?

Los problemas del absolutismo en las matemáticas, arrancan sin embargo desde su mismo punto de partida. La validez de las matemáticas depende de un conjunto de supuestos que se aceptan sin demostración: axiomas o como se les quiera llamar. Eso quiere decir que en la base existen supuestos, premisas, que son a lo sumo creencias, no conocimiento; por lo tanto, expuestos siempre a la duda y al cuestionamiento. No hay certeza absoluta posible. Una de las principales conclusiones a partir de los intentos fundacionales mencionados antes es que, para garantizar la consistencia de un sistema matemático, habría que acudir siempre a otro más poderoso. Entonces, en todas partes encontramos círculos viciosos: o puntos de partida no demostrables o la necesidad de afirmaciones o proposiciones adicionales para la demostración de consistencia; es decir: una expansión sin fin. En nuestra opinión: la crítica del absolutismo constituye la principal fuente de la reflexión contemporánea sobre las matemáticas.

Una nueva visión de las matemáticas que sustituya los anteriores paradigmas cuestionados no existe todavía de manera dominante. Podría decirse que el primero[24] en introducir una visión crítica del paradigma de las matemáticas como verdades infalibles (con una estructuración *axiomáticodeductiva)* fue Lakatos en los años Sesenta (4 artículos publicados entre 1963 y 1964, y luego recogidos en una publicación en 1976).[25] Frente a lo que el llamó un modelo "euclídeo" de entender las matemáticas, "infalible", ofreció una visión crítica *falibilista* de éstas. Su visión se suele asociar con el vocablo *cuasiempirismo*. Para Lakatos las matemáticas son un resultado de una práctica social e histórica. Establece una distinción entre lo que es esa práctica individual y *subjetiva* (cómo construye matemáticas el matemático) y el cuerpo teórico (el resultado final producido, lo que se podría llamar *objetivo*) que se valida en una comunidad matemática. La exposición y comunicación de los resultados al gremio matemático y su validación dependen entonces de reglas aceptadas histórica y socialmente. Su preocupación central se separa de las de los intentos absolutistas, los asuntos son otros: ¿cómo se hace la práctica matemática: su dimensión *subjetiva* pero sobre todo la *objetiva* y la interrelación entre ellas? A los planteamientos de Lakatos se deben añadir, incluso para algunos autores con mayor relevancia, los de Polyá, en un sentido similar.

Desde entonces se han producido trabajos en esa dirección como los de Davis y Hersh[26], Kitcher[27] y Kline; y es, precisamente, el marco teórico de partida en el que encuentra sustento nuestro análisis. Este llamado a una nueva visión no podría entenderse al margen de la contribución del nuevo "externalismo" en la disciplina de la *historia de la ciencia,* que fomenta una contextualización social y gremial de la evolución de la ciencia con Kuhn, Feyerabend, Toulmin, Lakatos, Laudan y muchos otros. La asunción de una visión *falibilista* de las matemáticas tiene varias implicaciones. El filósofo y educador británico Paul Ernest[28] resume el asunto así:

> "El establecimiento del conocimiento matemático como falible y cuasiempírico significa que las matemáticas no están herméticamente selladas y separadas de otras áreas del conocimiento, las actividades y los valores humanos. Esto significa que en las matemáticas al igual que en las ciencias y otras áreas del conocimiento humano el contexto de descubrimiento y de justificación se penetran mútuamente. Consecuentemente, no se les puede negar a los asuntos sociales, culturales y éticos un impacto sobre las matemáticas y el conocimiento matemático y debe admitirse con un rol esencial y constitutivo en la naturaleza del conocimiento matemático".[29]

Hasta hace poco –y todavía en buena medida- la percepción filosófica y más culta de las matemáticas ha sido eminentemente racionalista, apriorística y absolutista. En perspectiva: las nuevas orientaciones con énfasis en lo histórico, social, la heurística afectarán nuestra cultura empujando hacia una nueva percepción de las matemáticas de manera más extendida socialmente. Esto podrá ayudar a debilitar el polo de temor y rechazo de las matemáticas, una vez se integre o amalgame en las acciones educativas. ¿Pero acaba el asunto ahí, en la percepción? ¿No será la naturaleza misma de las matemáticas factor vital que empuja las características de su percepción? Eso mismo es lo que creemos. Por eso nos parece pertinente hacer una breve incursión en nuestra visión de ¿qué son las matemáticas?

Para nosotros, y a diferencia de los apriorismos diversos, las matemáticas no son puestas por un sujeto en sí, son un producto combinado de agentes que debe ser sancionado con el criterio último de la experiencia. Eso, si se quiere, convierte nuestra epistemología en *empirista* (aunque solo en un sentido deliberadamente general). Y responde la pregunta que hicimos al principio: las matemáticas sí son una ciencia natural. Esta es una definición de partida.

Las matemáticas son conocimiento de "lo general" (una manera de hablar) en el mundo que, como todo conocimiento, surge en una relación entre el sujeto y el objeto (ella misma un factor real). Ahora bien, cuando introducimos el vocablo "lo general" para las matemáticas no pensamos en "universales" (como Aristóteles) que existen en la realidad; para nosotros, se trata de percepciones humanas sobre el mundo: los conceptos de número 2, de 3 o de 526, nacen de condiciones de la realidad. Los substratos materiales para estos conceptos (abstracciones) son objetos empíricos de las matemáticas. Lo mismo sucede con las nociones de plano, recta, y punto. Evidentemente, no encontramos puntos, planos, rectas y números bailando en el mundo empírico (son conceptos), pero es fácil comprender que éstos poseen referentes en la realidad material. Podría sugerirse que propiedades generales del mundo como la *diversidad* o la *extensión* son fundamento de partes de las matemáticas; también podría sugerirse la *continuidad* física. En todo esto no se debe olvidar que la creación de conceptos e, incluso, la percepción de objetos empíricos que sustentan estos conceptos, depende mucho de nosotros: nuestro ojo, nuestra mente, condiciona lo que vemos. Es decir: vemos y conocemos lo que nuestra realidad nos permite. En esta condición, en lo que somos, participan factores biológicos y físicos pero también sociales (culturales e históricos). Esto es importante: lo que vemos es en buena parte nuestra realidad y sus fronteras. Vemos diversidad, pero se podría decir que todo lo que existe es una sola cosa (recuérdese aquella tensión en la Grecia Antigua entre unidad y diversidad: Parménides y Heráclito). Vemos continuidad en la materia, pero los espacios inter y subatómicos nos señalan lo contrario. Lo que vemos y los conceptos con los que comprendemos el mundo dependen de lo que somos y de los límites de nuestros sentidos en particular; por eso, con la creación de instrumentos técnicos superiores, varía nuestra percepción de lo que existe. El cielo estrellado de Aristóteles y Ptolomeo no podía ser el mismo que el de Galileo con su telescopio: el "tamaño" y la cantidad sí importan.

En la comprensión de los objetos empíricos de las matemáticas debe pensarse también en el sujeto: por ejemplo, nuestra capacidad de repetir acciones (en el tiempo) refiere también a la diversidad y a la continuidad. El número, otro ejemplo, no debe verse solamente como algo que encontramos en el objeto físico al margen de nosotros; también lo encontramos al repetir y organizar nosotros acciones. El contar no refiere solo al mundo externo, también al interno: a nosotros. De igual manera, el medir no refiere solo a un mundo "medible" sino, también, a nuestra acción. La conclusión: algunas de nuestras acciones son también substrato material de conceptos matemáticos. Acciones físicas humanas de repetir, agrupar, asociar, revertir, son objetos de las matemáticas, y con las mentales que las "replican" en nuestros cerebros sucede lo mismo. En esto tenía razón Piaget, al colocar un sustrato para las matemáticas en las operaciones y acciones del sujeto. Ahora bien, nos repetimos para que no haya duda alguna: estas acciones no son ajenas a la realidad física externa al sujeto; las cosas "se agrupan", los procesos físicos se "repiten" o se "devuelven", ellos mismos, sin nosotros.

¿Por qué podemos realizar estas acciones y operaciones mentales y éstas se conectan tan bien con el mundo? Por lo menos debido a 2 tipos de razones: porque nuestro ADN nos ha preparado para ello en millones de años de evolución a través del contacto con el mundo (apuntaba bien Piaget: una base biológica); y, en segundo lugar, porque vemos y actuamos *directamente* sobre la realidad física: el mundo exterior a nosotros nos condiciona *permanentemente*. Tiene razón Piaget al colocar en relieve el papel del sujeto. Nuestro conocimiento del mundo, tanto individual como colectivamente, es un factor muy dinámico. En la comprensión y manipulación activas de ese mundo construimos nuestro conocimiento.

Pero volvamos al objeto de las matemáticas: combinación de entes extraídos del mundo exterior al sujeto pero, también, de sus acciones y operaciones. Las matemáticas se construyen aquí: acciones sobre nociones extraídas de la realidad o acciones humanas, sobre ellas mismas o sobre otras acciones y operaciones. Acciones sobre acciones: un territorio fértil para la abstracción matemática. Y el fundamento para su especial abstracción.

Con el correr de la historia humana, las matemáticas de las abstracciones, acciones y operaciones sobre ellas mismas, llegaron a ocupar su corazón: conjuntos de construcciones mentales cada vez más alejadas de lo intuitivo y empírico. Tanto que, hoy en día, a veces, nos da la impresión que nunca tuvieron contacto con ese mundo. En ese laberinto complejo de acciones y operaciones sobre acciones y operaciones u otros nuevos conceptos extraídos del mundo empírico, la lógica ocupa un lugar privilegiado. La historia de las matemáticas es, entonces, y de manera drástica, *dual*: no solo se refiere como en otras ciencias naturales *especialmente* a las situaciones socioculturales e individuales que crearon conceptos o explicaciones de un objeto físico; sino también, de manera privilegiada, a aquellas situaciones que crearon conceptos y explicaciones de otros conceptos y explicaciones: edificios que si bien empíricos en sus cimientos, en la argamasa de todo, así como en los constructores y albañiles, se elevan cada vez más "hacia el cielo". A pesar de esta elevación, por sus fundamentos empíricos (en sus nociones, métodos y artífices), se hace posible su aplicación en el mundo. En particular, nos parece que debe enfatizarse que las teorías matemáticas son aplicables en la realidad humana porque en sus edificios conceptuales las reglas de construcción no son cualesquiera (la poesía y la pintura no son matemáticas, aunque pueda ser que éstas sí sean poesía y pintura para el espíritu); las matemáticas refieren a operaciones y acciones precisas que se pueden asociar a manipulaciones de la realidad material o social. Tal vez el término de lógica no sea el más adecuado para referirnos al marco más general para encerrar el fundamento de estos quehaceres abstractos de las matemáticas pero, si se nos permite la imprecisión: asociamos ese término con procesos de validación de las construcciones matemáticas.

Los métodos usados por los matemáticos para validar sus construcciones teóricas no son cualesquiera. Es decir, se trata de edificios conceptuales rigurosamente pegados, con colecciones de resultados integrados por principios de deducción aceptada. Estos métodos de organización de los entes y resultados matemáticos corresponden de manera abstracta al mundo. Son formas de organización de lo real no solo originadas en (puestas por) el sujeto (como Piaget) sino, también, en el objeto mismo: formas de organización de la naturaleza, que tomamos y comprendemos en esa relación compleja entre nosotros los humanos y nuestro entorno. Esto asociado a que las nociones básicas del edificio matemático son abstraídas del contacto con el mundo, constituye una base para valorar especialmente los mecanismos de validación establecidos colectiva e históricamente por los matemáticos. Los criterios de validación de las teorías matemáticas son construcciones históricas, por lo tanto variables en el tiempo, sujetos a cambios, errores y defectos. Su progreso, sin embargo, ha sido *constatable*, y hoy ofrece principios muy sólidos de rigor y pertinencia que permiten asegurar resultados teóricos "confiables" aunque, evidentemente, dentro de las fronteras establecidas por el *estatus* epistemológico de las matemáticas. Todo esto presupone que no cualquier cosa es matemática, que no toda abstracción o construcción mental hecha por los humanos es matemática y puede, en consecuencia, corresponder, de la manera que hemos sugerido aquí, a la realidad.[30]

Es en esta conjunción de objetos, y en su decurso histórico, que encontramos a la vez la abstracción peculiar e inevitable de las matemáticas y su capacidad para servir como instrumento de las otras ciencias y la tecnología. La pregunta vuelve ¿será posible eliminar el temor y rechazo sociales y escolares que señalamos al principio de este trabajo? Nuestra opinión es dual: es inevitable que las dimensiones más abstractas de nuestro conocimiento provoquen sensación de distancia y por ende puedan nutrir un rechazo, pero con una conciencia más apropiada de su naturaleza, que no subestime las dimensiones empíricas, ligadas al entorno o a las acciones físicas o mentales del sujeto, la tensión podría disminuir.

¿Cuáles son los principales vectores de este posible escenario? Pensamos que se han dado importantes cambios en las ideas sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje, que apuntan a una modificación positiva -aunque relativa- del rechazo, temor y distancia que suele promover las matemáticas en la educación y cultura. Sus posibilidades y materializaciones específicas dependerán –sin embargo- no de un decurso autónomo y abstracto del conocimiento matemático o educativo, ni de la conciencia en sí de la sociedad, dependerá también y primordialmente de la dinámica propia de las comunidades intelectuales concernidas. Es decir: la conciencia y las acciones de tanto los matemáticos propiamente como de los maestros y profesores de matemáticas.

NOTAS

[1] Este trabajo incluye varios párrafos del libro escrito por Angel Ruiz: *El desafío de las matemáticas*, Heredia, Costa Rica: Ed. EUNA, 2000.

[2] El territorio que nos resulta más decisivo de escudriñar es el de la *educación matemática* porque ésta está en la base no solo de la creación de matemática, sino de algo más relevante: la formación intelectual que requiere la ciudadanía para fortalecer las ciencias, las tecnologías y, en buena parte, la capacidad de *razonamiento*, la *lógica*, y la *criticidad* que necesitamos para escalar esta escarpada época. De muchas formas, lo que acontezca con la educación matemática influirá directa y drásticamente lo que pase con el conjunto de la educación nacional o regional y, por ende, con el destino de las estrategias colectivas de progreso de cada país. Por eso, deliberadamente, en las líneas que siguen se encontrará una vocación educativa.

[3] Por ejemplo, el gran matemático español, radicado muchos años en Argentina, Luis Santaló decía: "De las dos cuestiones esenciales, el qué enseñar y el cómo hacerlo, en la actualidad es más importante la primera".

[4] Los países periféricos trataron de adaptarse a los cambios propuestos. En América Latina la reforma se inició en 1960 al llegar textos norteamericanos con las nuevas orientaciones. Sin embargo, fue la primera *Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática* en Bogotá, en 1961, lo más decisivo: delegados de los países americanos y famosos matemáticos europeos como Choquet, Schwartz, Pauli y Bundgaard, se reunieron bajo la dirección del insigne matemático norteamericano Marshall Stone. En esa conferencia se creó el *Comité Interamericano de Educación Matemática* para impulsar la reforma en los diferentes países.

[5] Von Glaserfeld, E. "An introduction to radical constructivism", en el libro editado por P. Walzlawick: *The invented reality* (pp. 17-40). New York: Norton.

[6] Von Glaserfeld, E. Learning as a constructive activity. En el libro editado por C. Janvier *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 3-189. Hillsdale, N. J.: Erlbaum.

[7] Von Glaserfeld, E. “Constructivism in Education” en la obra editada por Huse, T. y Postlethwaite, T. N. *The International Encyclopedia of Education Suplementary Volume*, Oxford: Pergamon Press, 1989.

[8] Véase “Problems of developmental teaching” (Parte 1) en *Soviet Education*, 30 (8), 6-97, 1988.

[9] Cfr. “The problem of activity in psychology” en el libro editado por J. V. Wersch The concept of activity in *Soviet Psychology*. Armonk, N. Y.: Sharpe, 1981.

[10] Aunque asumen como suya la herencia de diferentes psicólogos que se distanciaron de las aproximaciones basadas en el individualismo y buscaron una referencia social más amplia para la acción psicológica: Brown, Collins y Duguid, por ejemplo en “Situation cognition and the culture of learning” en *Educational Researcher*, 18 (1), 32-34, 1989; también en J. G. Greeno “Number sense as situated knowing in a conceptual domain” en el *Journal for research in Mathematics Education*, 22, 170-218, 1991, y en el trabajo editado por A. H. Schoenfeld *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-216) Hillsdate, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates en 1987.

[11] Es, también, apenas natural que sea precisamente en la *enseñanza-aprendizaje* de las matemáticas donde se busque hacer modificaciones. La educación plantea *de una manera práctica* la mayoría de los problemas epistemológicos centrales, y exige soluciones concretas (que serán siempre sujetas a la crítica, al error y la corrección). La educación es un factor dinámico en el desarrollo de las reflexiones epistemológicas y filosóficas. No sería extraño, entonces, pensar en las comunidades de educadores de la matemática como el medio social más adecuado para construir importantes

modificaciones en la percepción de la naturaleza de las matemáticas. En este sentido, lo que se podría conceptualizar como "filosofía de la educación matemática" más que una parte de la filosofía tendría un sentido pragmático integrado a la misma educación matemática. Es éste precisamente el punto de vista que pareciera entenderse asume el británico Paul Ernest en un relativamente reciente debate con el profesor de filosofía Zheng Yuxin de Nanjin University en China: "Mi posición es que la filosofía de la educación matemática es primariamente una parte de la educación matemática. Se trata de una perspectiva sobre los problemas y asuntos de la educación matemática, pero que integra y aplica los métodos y conceptos de la filosofía". Ernest, Paul: "In response to professor Zheng". *Philosophy of Mathematics Education Newsletter* 7 (February 1994).

[12] Consúltese: Kline, Morris. *Mathematics. the loss of Certainty*. New York: Oxford University Press, 1980. p.15.

[13] Se trataba de una "trascendencia", en Pitágoras poseía un sentido de "inmanencia".

[14] Para algunos, la filosofía de las matemáticas arranca con Frege. Esta es una posición muy drástica y distorsionada acerca del quehacer filosófico sobre las matemáticas.

[15] Puede consultarse: Curry, Haskell. *Outlines of a formalist philosophy of mathematics*. Amsterdam: North Holland, 1970.

[16] Por ejemplo, rechazaban la prueba suministrada por Cantor de que los números reales son no *numerables*.

[17] Es decir no aceptaban las pruebas "por contradicción" tan típicas de las matemáticas clásicas.

[18] Un trabajo seminal de Brouwer en 1913: "Intuitionism and Formalism", en el *Bulletin of the American Mathematical Society*, 20, pp. 81-96. Y también: Consciousness, Philosophy and Mathematics, en *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy* (Amsterdam, 1948), Ed. E. W. Beth, H. J. Pos y J. H. A Hollak. Vol. I, pt. 2, Amsterdam.

[19] Puede verse de Heyting: *Intuitionism: An introduction*. Amsterdam: North Holland, 1956.

[20] Es decir: la matemática pura se podía expresar en sistema formales no interpretados, en estos las verdades de las matemáticas eran representadas por teoremas formales.

[21] Un trabajo clave: Uber das Unendliche. *Mathematische Annalen 95* (Berlin). Hay una traducción de E. Putnam y G. J. Massey que se llamó "On the infinite" en el libro editado por Paul Benacerraf y Hilary Putnam: *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. N. J.: Prentice Hall, 1964; y por S. Bauer-Mengelberg en el libro de Jean Van Heijenoort: *From Frege to Gödel*. *A Source Book in Mathematical Logic*, 1879-1931. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967.

[22] En 1931, en un artículo intitulado "Sobre sentencias formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas afines", Gödel destruiría las aspiraciones de los formalistas. En un resumen de su trabajo que apareció en la revista *Erkenntnis* Gödel decía: "En el trabajo anteriormente citado se muestra que no hay ningún sistema formal con un número finito de axiomas que sea completo ni siquiera respecto de las sentencia aritméticas. Aquí entendemos por "sentencias aritméticas" aquellas en que no aparecen más nociones que +, . , = (adición, multiplicación e identidad, referidas a números naturales), además de los conectores lógicos y los cuantificadores universal y existencial, aplicados solo a variables de números naturales) por lo cual en las sentencias aritméticas no aparecen más variables que las de los números naturales). Incluso para los sistemas formales con un número infinito de axiomas hay sentencias aritméticas indecidibles, con tal de que su esquema axiomático cumpla ciertas condiciones (muy generales). De lo dicho se sigue, en especial, que hay sentencias aritméticas indecidibles en todos los sistemas formales conocidos de la matemática -por ejemplo, en *Principia Mathematica* (con axiomas de *reducibilidad*, de *elección* y de *infinitud*), en la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo. Fraenkel y en la de Von Neumann, y en los sistemas

formales de la escuela de Hilbert. Gödel, Kurt. *Obras completas*. Trad. Jesús Mosterín. Madrid: Alianza Editorial, 1981, p. 476.

23 Debemos aclarar, sin embargo, que estos autores no asumían algunas de las ideas de Frege en torno a la lógica: para Frege, los principios de la lógica eran vistos como fundamentales para todo pensamiento, para los neopositivistas la lógica era verdadera por convención. Además, Frege siempre afirmó que la matemática se refería a objetos, aunque peculiares. Varias replanteos a esta visión se hicieron en los años siguientes debido a importantes señalamientos de filósofos como Quine (1936, en 1953 y en 1962). Quine concluyó en una forma propia de *platonismo* muy similar al del Frege original: la matemática se refiere a conjuntos y números. Durante los años 50 y 60, mucho de la filosofía de las matemáticas se concentró en buscar una fundamentación más por el lado de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, distanciándose de los proyectos fundacionales de principios de siglo. En los 70, si bien se dieron trabajos en la misma línea, otros buscaron un enfoque diferente, *estructuralista*: las matemáticas no se refieren a describir los conjuntos sino a las propiedades de estructuras matemáticas (M. D. Resnick en 1975, 1981 y 1982, también S. Shapiro en 1983). Existen neofregeanos, neoestructuralistas, etc... Muchos de estos trabajos son de un gran contenido técnico de mucho detalle y substancialmente menos de epistemología o de reflexión global sobre las matemáticas.

24 Algunos temas y preocupaciones similares e encuentran también en trabajos de Raymond Wilder: *Evolution of Mathematical Concepts*. New York: Wiley, 1975. También subrayaron la importancia de argumentos no deductivos en las justificaciones matemáticas en ese mismo año: M. Steiner (*Mathematical Knowledge*. Ithaca, N.Y.: Cornell University Press) y H. Putnam (*Philosophical Papers*. Vol I: *Mathematics, Matter and Method*. Vol 2: *Mind, Language and reality*. Cambridge: Cambridge University Press).

25 La principal influencia de Lakatos provenía de Popper quien ofrece el *falibilismo* como una respuesta a lo que llamó doctrinas "justificacionistas": que establecen una categoría de conocimiento como fuente de autoridad y fundamento de otras o todas las demás (como la lógica, la aritmética, etc). Una visión interesante (por el momento de escribirse) aunque no muy profunda sobre esto se puede ver en: Grattan-Guiness, I. "Not from Nowhere History and Philosophy behind Mathematical Education", en *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* Vol 4, 421-453 (1973).

26 Su obra clásica: Davis, Philip y Hersh, Reuben: *The Mathematical Experience*, Boston: Birkhäuser, 1981.

27 Su obra más sólida es: Kitcher, Philip. *The Nature of Mathematical Knowledge*. New York: Oxford University Press, 1983.

28 Ernest ha desarrollado un campo particular muy dinámico en la comunidad internacional de la educación matemática: la filosofía de la educación matemática. Su obra seminal es: *The Philosophy of Mathematics Education*. Hampshire, G.B.: The Falmer Press, 1991.

29Ernest, Paul: "In response to professor Zheng". *Philosophy of Mathematics Education Newsletter* 7 (February 1994).

30 Hagamos una acotación adicional en torno a este asunto: los criterios de validez lógica y coherencia deductiva en las matemáticas son extraordinariamente valiosos. Esto es un punto de partida. No obstante, como hemos visto aquí, se debe tener cuidado. Además, tampoco sugerimos que el quehacer abstracto de las matemáticas se reduce a la deducción lógica. Que se use la deducción lógica en la práctica matemática y, específicamente, que el rigor lógico sea un requisito en la *comunicación de resultados entre los matemáticos*, no quiere decir que las matemáticas sean reducibles a la deducción lógica. La larga experiencia del logicismo y los otros proyectos fundacionales nos confirman esta conclusión. Hemos insistido a lo largo de este trabajo en señalar como motor de las matemáticas una práctica de acciones y operaciones mentales sobre otros conjuntos de objetos, acciones y operaciones, en un doble influjo primigenio: epistemológicamente, el mundo empírico y el sujeto.