RUSSELL Y LOS PROBLEMAS DEL LOGICISMO

Ángel Ruiz
www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz

Referencia: año 1988. MATHESIS, Revista de divulgación e información en Filosofía e Historia de las Matemáticas, Volumen IV, No 1, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México.

Cuando las paradojas de la Teoría de clases emergieron, el proyecto logicista de Gottlob Frege entré en una crisis que él mismo fue incapaz de resolver. No se trataba para Frege de un problema técnico, sino de un cuestionamiento de toda la visión que tenía sobre la aritmética. La profundidad de la crisis que se abrió en esta etapa fregeana del logicismo debe entenderse bien: para Frege, su proyecto era la descripción de verdades absolutas correspondientes a un mundo no tangible pero real. Las paradojas cuestionaban el sustrato filosófico del proyecto. Frege pensaba que lo que estaba en juego era la posibilidad de la fundamentación lógica de la Aritmética. Intentó soluciones a las dificultades presentadas por la vía de modificaciones en el "axioma V" de los Grundgesetze, pero este camino no obtendría buenos resultados, como Lesniewski demostraría en 1938.

Frege siguió después de la emersión de las paradojas afirmando la existencia de un mundo de objetos no sensibles e independientes, incluso tal vez de una manera radical como se expresó en "Der Gedanke". Pero el proyecto logicista no fue apuntalado otra vez por él. Incluso intentó fundamentar la Aritmética en la geometría. Una etapa en el Logicismo había acabado.

El proyecto logicista de Frege representó un primer intento por dar cuenta teóricamente de la naturaleza de las nuevas matemáticas, partiendo de los resultados en la Lógica y en la rigorización de las matemáticas del siglo xix. Frege acudió a la filosofía logicista de Leibniz, y apuntaló una nueva versión de un racionalismo axiomatizante que se distanciaba de la filosofía de las matemáticas de Kant. Frege conjuró el paradigma racionalista y la visión lógico-axiomática sobre las matemáticas de una manera técnica extraordinariamente precisa. El apuntalamiento de este modelo tan generalizado de comprensión de las matemáticas no condujo sin embargo a defender una visión sintáctico-formalista de las mismas. El platonismo (en una u otra medida) que siempre recorrió su pensamiento representó una importante barrera para impedir llegar a ese punto. Para Frege, la verdad matemática nunca podía reducirse a la mera manipulación de signos, correspondía a lo real.

En los años en que Frege fracasa en la fundamentación logicista de las matemáticas, no era claro que esta resultaba una empresa imposible en toda circunstancia. En medio de un contexto de incertidumbre en las mismas bases de las matemáticas, un nuevo intento logicista sería realizado buscando dotarlas del fundamento absoluto que aparecía necesario.

1. Para Bertrand Russel no sólo la aritmética era reducible a la lógica, como en Frege; también el resto de las matemáticas.[1] En él desaparecería toda alusión a una intuición kantiana en mateniáticas. Russell llegó al logicismo de una manera independiente de Frege; su aproximación se establecería en el paso de su reacción frente a una conciencia anterior idealista, y a partir del contacto con los trabajos de Peano en la rigorización de las

matemáticas. En la Evolución de mi pensamiento filosófica va a reconocer que alguna de las ideas que aparecerán en los Principios y en Principia Mathematica, habían sido planteadas por Frege por lo menos 16 años antes[2].

La filosofía de las matemáticas de Russell así como el proceso de la materialización de su proyecto logicista estuvieron determinados por la realidad de las paradojas; Russell abrió una segunda etapa caracterizada por la búsqueda de la solución a éstas. Las preocupaciones de Russell desde que escribió los Principios giraron en torno a la solidez y consistencia de las matemáticas. Mientras que Frege escribió durante dos décadas sus principales obras sobre la base incuestionada de la creencia en una -aritmética sólidamente anclada en la verdad absoluta e inquebrantable, Russell partió de un mundo matemático sacudido por la emersión de hechos casi tan graves como los irracionales para los pitagóricos. Esto sería decisivo: la imagen primigenia sobre la matemática de Russell (de un edificio de verdades firme y seguro) interactuaría con las dificultades arrastradas por el "factor paradojas" desde un principio. Esto condicionó la evolución de toda su aproximación teórica sobre las matemáticas.

En el Prefacio de Principia mathematica Russell afirmaba que ha demostrado "...que es posible construir una lógica matemática que no lleve a contradicciones".[3] Esto encerraba el núcleo de sus pretensiones filosóficas sobre las matemáticas. El logicismo se plantea aquí como la forma fundamental de asentar la coherencia y solidez de las matemáticas. Al igual que en Frege se trataba de exhibir la naturaleza axiomática de éstas en primer lugar, y demostrar cómo las nociones primarias son lógicas. El punto de partida es transparente: al igual que en Frege la lógica es consistente; quedará probado que también la matemática lo es, si se reduce a ésta.

El proyecto logicista en Russell pretende la reducción de toda la matemática, pasando a través de la aritmetización de la misma. Esta pretensión logicista niega la afirmación kantiana de todas las matemáticas (incluyendo la geometría) como conocimientos sintéticos. Russell piensa que el logicismo da el sentido correcto a lo que se debe entender por a priori en las matemáticas:

> El hecho de que todas las constantes matemáticas son constantes lógicas, y que todas las premisas de la matemática se hallan relacionadas con ellas, da, creo, la formulación precisa de lo que los filósofos querían al asegurar que la matemática es a priori. El hecho es que, una vez que ha sido aceptado el aparato lógico, se deduce necesariamente toda la matemática.[4]

El proyecto logicista lo explican Putnam y Benacerraf en su Philosophy of Mathematics así:

> El logicismo (Frege-Russell-Whitehead) surge en referencia a otro problema: la naturaleza de la verdad matemática. Los logicistas esperaban mostrar, contra Kant, que las matemáticas no tienen un "objeto", que trata sólo con relaciones entre conceptos, y que estas relaciones eran "analíticas". [5]

Para Frege en efecto la reducción lógica es sinónimo de analiticidad.[6] Para Russell la reducción logicista libraba las matemáticas de una intuición subjetiva. Sin embargo, por lo menos en una primera etapa de su evolución filosófica, la lógica era referida al mundo.

Carnap, en su artículo de 1931 "The logicist foundations of mathematics" precisa el proyecto, reduciéndolo a dos aspectos:

1. Los conceptos de las matemáticas pueden ser derivados de conceptos lógicos a través de definiciones explícitas.
2. Los teoremas de las matemáticas pueden ser derivados de axiomas lógicos a través puramente de la deducción lógica.[7]

Hempel en "On the nature mathematical truth" nos dice (lo que será la interpretación positivista de la matemática), como consecuencia de lo que establece el logicismo, que la verdad de las proposiciones matemáticas se establece sólo por virtud de las definiciones matemáticas que intervienen.[8] La certeza de las proposiciones matemáticas es entonces "incuestionable" y las matemáticas no poseen "contenido fáctico" alguno: "no transmiten información sobre ningún material empírico".[9]

El proyecto logicista no implica que cada símbolo matemático deba tener un equivalente lógico, se trata más bien de una traducción de unos enunciados en otros.[10] Eso sí en todo momento se supone que las proposiciones son sustituidas sin alteración del valor de verdad, como dice Ayer: "el sistema es extensional"[11]." El proyecto de Russell (al igual que en Frege) no es realizado sin "intermediarios": la teoría de conjuntos está en el camino, y no es claro que ésta sea lógica. En tal sentido tampoco se esclarece que esta reducción logicista sea sinónimo de demostración del carácter analítico de la matemática. De hecho hay más problemas involucrados, que luego analizaremos.[12]

El proyecto logicista se desarrolla en detalle en *Principia mathernatica*. La noción más elemental usada aquí es la de proposición.[13] Las oraciones que contienen variables y que al sustituirse por constantes dan proposiciones, se llaman funciones proposicionales. Toda proposición debe tener un valor de verdad. Las proposiciones primitivas usadas son:

i) $:p \vee p \cdot\supset\cdot p$
ii) $:q \cdot\supset\cdot p \vee p$
iii) $:p \vee q \cdot\supset\cdot q \vee p$
iv) $:p \vee (q \vee r) \cdot\supset\cdot q \vee (p \vee r)$
v) $:\cdot q \supset r \cdot\supset: p \vee q \cdot\supset p \vee r$

Estas proposiciones deben estar acompañadas de reglas precisas de determinación de "sus propias consecuencias".[14] El camino seguido en Principia hace pasar de las proposiciones a las funciones proposicionales. Estas últimas representan clases a través de lo que puede llamarse definiciones intencionales. Como señala Wilder: la noción de conjunto puede ser reemplazada por la de propidad, un conjunto es considerado consistiendo de todas las cosas que poseen cierta propiedad dada.[15]

Russell en su Introducción a la Filosofía Matemática nos describe la esencia del proceso de su derivación logicista. Parte, en primer lugar, de la reducción axiomática de Peano, quien ha partido de las nociones básicas de cero, sucesor, y número. Critica la axiomatización de éste en términos similares a los de Frege.[16] La axiomatización de Peano permite que toda progresión sea definida por ella. Russell estima que sólo su teoría supera los problemas.[17] Para Russell "Un número es algo que caracteriza conjuntos, a saber, a los que tienen ese número".[18] Es decir, se trata de una propiedad. Contar para él: consiste en establecer la correlación de "uno a uno" entre el conjunto de los objetos a contar, y el de los números naturales (excluyendo al cero) que se usan en el proceso.[19]

Y además: la noción de coordinación está lógicamente implicada en la operación de contar, y es lógicamente más simple aunque sea menos familiar.[20]

La conexión teórica con Frege es transparente, pero Russell no asimila su noción de número a la de Frege: "El número de una clase es la clase de todas las clases que le son coordinables".[21] ¿Por qué prefiere esta aproximación? Russell lo señala en el mismo libro: A expensas de una pequeña singularidad, esta definición proporciona algo determinado e indubitable; y no es difícil demostrar que los números así definidos gozan de todas las propiedades que esperamos que tengan[22].

De una manera más extensa y precisa se refiere a ello en *La evolución de mi pensamiento filosófico:*

> Esta definición tiene varias ventajas. Afronta todos los problemas que habían surgido antes en relación con "0" y "1". "0" es la clase de aquellas clases que no tienen miembros, es decir, es la clase cuyo único miembro es una clase que no tiene miembros. "1" es la clase de aquellas clases que tienen la prioridad de consistir en cualquier cosa que sea idéntica a algún término x. Una segunda ventaja de la definición es que vence las dificultades relativas aL uno y a muchos. (...). Pero mucho más importante que cualquiera de estas dos ventajas es que nos vemos libres de los números como entidades metafísicas. Se convierten, de hecho, en meros convenios lingüísticos con no mayor sustancialidad de la que tiene "etcétera" o "por ejemplo".[23]

Esta definición pone de manifiesto que la aproximación de Russell es distinta a la de Frege. Hay una actitud que podríamos considerar "nominalista" que busca hacer desaparecer (como la navaja de Occam) entidades innecesarias. En la segunda edición de los Principios, Russell relata que en esa época (1 903) su posición era fundamentalmente platonista. Sin embargo, es imposible negar que a lo largo de esta etapa de la evolución de su obra también cohabitará una cierta actitud nominalista. Es la que llevará a la "teoría de las descripciones" y a la "no class theory".

Para algunos (como Kórner) existen dos vertientes del logicismo: *nominalista* en Russell y *realista* en Frege. Esto se establece a partir del uso diferente de la definición.[24]

En mi opinión no es muy adecuada esta separación que establece Ktirner. Russell no es nominalista, ni su logicismo puede caracterizarse como tal. Como veremos, Russell no sostiene l, misma aproximación filosófica de Frege sobre las matemáticas, pero existen muchos puntos de intersección (cuya magnitud en definitiva dependerá también del momento preciso de la obra de Russell que se considere). En los Principias, en el apéndice sobre Frege, Russell dice: "Frege da exactamente la misma definición de números cardinales que yo he dado, por lo menos si identificamos su campo con mi clase".[25] Russell aquí afirmaba las coincidencias de su visión con Frege (aunque un poco después critica como "demasiado física" su noción de objeto)[26]

Un aspecto importante del desarrollo que establece Russell en Introducción a la Filosofía matemática es en tomo a la inducción matemática. Refiriéndose a algunos comentarios de Poincaré dice: Ahora sabemos que todas estas consideraciones son arróncas, y que la inducción matemática es una definición, no un principio.[27]

Los números naturales van a ser definidos como: …aquellos números en los que las demostraciones por medio de la inducción matemática son aplicables, es decir, como aquellos que poseen las propiedades inductivas.[28]

La inducción matemática hace referencia a tal vez la característica más importante de la aritmética. En su definición se encierra Jo que será una fuente de dificultades para la aproximación russelliana.

II. El "factor paradojas" era tal vez el elemento más decisivo en la motivación de la actitud nominalista en RuselI (que he descrito antes). Se trataba de un problema de extraordinaria importancia para la fundamentación de la matemática. Russell pensaba que las paradojas se referían a problemas con la lógica y su expresión; lo que tomaba lugar a partir de las semejanzas que encuentra entre las paradojas de las clases con la de Epiménides. Los primeros intentos para dar cuenta del factor dificultuoso lo expresaba en los *Principios de la Matemática*.[29] La forma de abordar el problema era aquí, sin embargo, apenas un ensayo.

Establecerá un mejor intento hasta 1908 cuando publica su "Mathernatical logic as based on the theory of types". En esé artículo define "tipo" de la siguiente forma: …el campo de significación de una función proporcional, esto es, como la colección de los argumentos para los que la mencionada función tiene valores.[30]

Establece entonces el principio de lo que se conoce por la "teoría de los tipos":

> La clasificación en tipos de los objetos se hace necesaria en razón de las falacias reflexivas que de otro modo surgirían. Estas falacias, como vimos, han de ser evitadas póniendo eh práctica lo que podría llamarse el 'principio del círculo vicioso" esto es: "ninguna totalidad puede contener miembros definidos en términos de sí misma". Dicho principio, formulado en nuestro lenguaje técnico, se convertiría en: "aquello que contenga una variable aparente no debe constituir un posible valor de dicha variable".
>
> Por consiguiente, cuanto contenga una variable aparente habrá de ser de diferente tipo que los posibles valores de esta última; diremos que es de un tipo superior. Así pues lo que determina el tipo de una expresión son las variables aparentes contenidas en éste.[31]

La aproximación de Russell partía de una idea que primero expresó J. Richard y después fue desarrollada por Poincaré.[32] El mismo año 1908 Zennelo y Brouwer trataron de dar cuenta de las paradojas a través de dos orientaciones totalmente diferentes.[33] En "The logicist foundations of mathematics" Carnap nos reiume técnicamente la teoría de tipos:

> …la teoría de tipos consiste en la siguiente clasificación de expresiones en diferentes "tipos": al tipo O pertenecen los nombres de los objetos ("individuos") del dominio de discurso (e.g. a.b,…)
> Al tipo 1 pertenecen las propiedades de estos objetos (e.g. f(a), g(a),…). Al tipo 2 pertenecen las propiedades de estas propiedades (e.g. F(f), E(f),…) (...). Al tipo 3 pertenecen las propiedades de propiedades, y así- sucesivamente. La regla básica de la teoría de -tipos es que cada predicado pertenezca a un determinado tipo y puede ser aplicado significativamente sólo a expresiones del tipo inmediatamente inferior.[34]

Esta regla de ordenación daba cuenta de las paradojas; sin embargo, Russell creó también la "Teoría ramificada de tipos" para dar cuenta de las paradojas como la de

Epiménides, Berry, etc. Ramsey demostró en 1925 que esta últinit no era necesaria para resolver las paradojas lógicas. El dividía las paradojas én lógicas y epístémológicas (Ladriére más recientemente las divide en sintácticas y semánticas)[35] . Para dar cuenta de las lógicas bastaba la teoría simple de tipos, la "ramificada" introducía un axioma extralógico, a saber: el de reducibilidad. En el artículo de 1908 Russell establecía la equivalencia para todos los valores de toda función proposicional y una "función predicativa".[36] Esta hipótesis la llamaba *"axioma de las clases o axioma de reducibilidad"*.[37] En el mismo artículo Russell hacía una observación sobre la necesidad de este axioma que conecta con lo que hemos señalado característica central de la aritmética:

> Mas si la matemática ha de ser posible, es absolutamente necesario que encontremos un medio de formular enunciados que equivalgan de algún modo a aquello en que pensamos al hablar (impropiamente) de "todas las propiedades de x". Esta necesidad se pone de manifiesto en relación con la inducción matemática[38]

El axioma de reducibilidad era un defecto de la Teoría Ramificada de Tipos. En su *Introducción* de 1918 así lo formula: Existe un tipo ψ de funciones —a tal que, dada cualquier función a, ella es formalmente equivalente a una función del tipo en cuestión.[39]

En esa obra nos indica la importancia que le atribuía: El axioma de reducibilidad implica todo lo que realmente es esencial en la teoría de clases; por este motivo cabe preguntarse si existe una razón para suponerlo verdadero.[40]

Aquí es claro que no se trata de un axioma lógico, pero "podría muy bien ser expresado como una hipótesis cada vez que se lo emplea, en lugar de admitirlo como realmente verdadero".[41]

Más aún, se refiere a este axioma como una "forma generalizada de la identidad de los indiscernibles de Leibniz".[42] Ramsey demostró que en las paradojas en las que aparecen términos como "significar", "definir", "nombrar", o "afirmar", éstos no corresponden al terreno de las matemáticas sino a una "meta-teoría"; por lo tanto no es necesario el axioma de reducibilidad.[43]

Los problemas en relación a axiomas no lógicos no acaban con el de reducibilidad. En Introducción a la filosofía matemática nos enuncia otro, el "axioma de multiplicación o elección":

> Dada una clase de clases mutuamente exclusivas, de las cuales ninguna es nula, existe por lo menos una clase que tiene exactamente un elemento común con cada una de las clases dadas.[44]

Acerca de su verdad o falsedad, Russell afirma que no se sabe.[45] El axioma de elección fue aludido por Peano en 1890, fue reconocido por Beppo-Levi en 1902 y "sugerido a Zermelo por Erhardt Schmidt en 1904".[46] El uso explícito del axioma por Zermelo en 1904 ocasionó todo un revuelo en el *Mathematische Annalen*.[47] Este axioma incidía sobre una problemática conectada con los fundamentos de la matemática: la noción de existencia en matemáticas. Russel no debatió mucho sobre el axioma, simplemente lo integró en su edificio logicista.

Había otro axioma no lógico muy importante: el de infinitud. Lo enuncia en 1918 así:

Si n es un número cardinal inductivo cualquiera, existe por lo menos una clase de individuos que tiene n elementos.[48]

Sin este axioma (dice Russell) es imposible obtener los resultados matemáticos de los enteros infinitos y los de los números reaIes.4 Russell va a aceptar que es imposible saber si el axioma es verdadero o falso.

Sin la validez de los dos últimos axiomas mencionados la fundamentación matemática resulta imposible. Por una parte, la inducción en la aritmética no se podría realizar (con ello no hay aritmética), y sin el otro no hay teoría de los números reales. [49]Por otra parte, la misma teoría de tipos es una ordenación no lógica. El proyecto russelliano no podía dar cuenta de la matemática sin esos axiomas no lógicos. Pero si se introducen esos axiomas ya no estamos en Ja fundamentación logicista. Los axiomas no lógicos en el logicismo equivalen al "…abandono del proyecto fregeano".[50] Esto ponía en evidencia una segunda crisis en el logicismo. Con Frege el proyecto se descalabró con las paradojas.

Con Russell los nuevos intentos conducen al "abandono" del proyecto.
III. Russell abandonó antes de los *Principia Mathematica* el tratamiento de clases y lo sustituyó por las funciones proposicionales; todo en aras de una descripción "menos platonista" de la matemática. En 1918 decía: "las clases son ficciones lógicas", "símbolos incompletos".[51] Este proceso de "desplatonización" arrancó con la teoría de las descripciones y culminó en la "no class theory". Gddel piensa sin embargo que en la primera Russell sigue siendo realista.[52]

Russell va a proponer originariamente (1906) dos caminos para la solución a los problemas que encerraba la suposición de que toda función proposicional engendraba una clase: "la teoría del zig-zag y la teoría de la limitación de tamaño".[53] Reseña Gódel:

> La segunda establecería que la existencia de una clase o concepto depende de la extensión de la función proposicional (exigiendo que no sea demasiado grande) y la primera establecería la dependencia respecto a su contenido o significado (exigiendo cierto tipo de "simplicidad" cuya formulación precisa constituiría el problema).[54]

Russell sin embargo no siguió ninguno de los caminos que trazó; en su lugar optó por la "no class theory", que significa simplemente que las clases "no existen nunca como objetos reales".[55] Gödel critica a Russell por haber introducido en Principia principios sin "mencionar en absoluto su dependencia de la teoría de la inexistencia de clases.[56]

Refiriéndose al principio del "círculo vicioso" dice Gödel

> *Principia* (en su primera edición) no satisface (. . .) si "definible" significa "definible dentro del sistema", y no se conoce ningún otro método de definir fuera del sistema (o fuera de otros sistemas de matemática clásica) que los que ya involucran totalidades más amplias que las que aparecen en los sistemas.[57]

Detrás de la adopción de esta teoría, en la que apenas se sustituyen las clases por "las nociones igual o más complicadas de propiedades y relaciones",[58] se encuentra cierto nominalismo. Aquí encontramos cierta “degradación” de las clases en “símbolos incompletos”. [59]

La noción original de clase estaba conectada a las contradicciones que suponían las paradojas de una manera muy directa. Esta teoría original, según Black

> …colapsó a través de inconsistencias internas asociadas con la existcncia de clases infinitas, y fue sacudida por muchas teorías alternativas de clases todas menos realistas que la descrita antes, hasta que las clases vinieron a degradarse como símbolos incompletos. [60]

El nuevo carácter que dio Russell a las clases no resolvió los problemas planteados, puesto que (en parte) ellos estaban originados en las dificultades de la definición en Principia, de símbolo incompleto, sobre todo por la “vaguedad de la noción de función proposicional”.[61] Las funciones proposicionales encerraban un problema, que Quine ha señalado repetidas veces. Para éste el problema reside en una equivocada identificación entre la relación de pertenencia y la predicación. Nos dice: Dos oraciones abiertas que sean verdaderas exactamente de las mismas cosas no determinan jamás dos conjuntos, pero sí que pueden determinar dos atributos diferentes.[62]

Russell (según Quine) confundió la noción de función proposicional: “. . . la usó unas veces para referirse a predicados y otras para referirse a atributos”.[63] Quien hace una advertencia en el tratamiento de la predicación relacionada con la teoría de conjuntos, y critica la ocultación de las hipótesis de existencia en la misma.[64] La crítica es acertada. Con la “no class theory” no se están resolviendo los problemas suscitados a partir de las paradojas. Las paradojas cuestionaron el axioma V del *Grundgesetze*; precisamente la conexión conjunto — (función proposicional) es la que sigue siendo insatisfactoria en el tratamiento que hacen Russell y Whitehead en Principia. Más aún, el problema de las paradojas se dirige frontalmente contra la noción de clases; no basta una mala traducción del lenguaje para resolver lo que plantea el uso, la existencia de clases es el problema de fondo. Y se trata de uno que se vincula a los problemas fundamentales de la filosofía de la matemática. Se trata de la discusión en torno a la actitud que se debe asumir frente a las entidades matemáticas; es una delicada problemática epistemológica y ontológica. Russell frente a las clases busca una solución “técnica” y además por una vía inadecuada. GiSdel tiene razón cuando señala la inconsistencia que aparece en Principia. Para éste último, sin embargo los problemas se van a resolver de manera fácil adoptando el platonismo. Pero la indagación epistemológica no puede contentarse con esa opción.

Tanto en Frege como en Russell el proyecto logicista pasa por la teoría de conjuntos, como dice Quine: “... la lógica capaz de albergar esa reducción de la matemática era una lógica que incluía las teorías de conjuntos”.[65] Esto es decisivo, por más que se valore la labor logicista en los fundamentos de la matemática, por más que se aprecien los tecnicismos desarrollados en Grundgesetze y en Principia, la reducción de la matemática a la lógica no se ha realizado. La matemática se puede reducir a nociones de la teoría de clases. Pero no ésta a la lógica. Más aún, los problemas en tomo a la prueba de completitud de la aritmética más bien se pueden transmitir a la teoría de clases”.[66] La noci6n básica de la teoría de clases es la de pertenencia y es precisamente en el uso y función que ésta tenga que debe buscarse por lo menos en parte una redefinición. Conectado a ello todo apunta a una reflexión más profunda sobre la denotación o connotación en la definición de clases.

Mientras que la primera refiere a objetos particulares, la connotación expresa una abstracción. ¿Cuáles son los límites válidos de esta abstracción en matemáticas? La reflexión debe conectar esto con los criterios generales epistemológicos sobre la matemática. Las definiciones por comprensión no son necesariamente las más adecuadas; su función debe ser precisamente determinada, y debe de establecerse un dominio (llamémoslo de "contingencia") cuando se usen. La definición de este dominio no es un problema sintáctico o funcional en el discurso. Debe ser establecido a la luz del esclarecimiento teórico sobre la naturaleza de las matemáticas.

IV, La teoría de tipos presenta también problemas en el proyecto logicista. El primero es que tiende a adolecer del mismo problema que le dio origen: nociones como la de "entidad" y tipo aparecen sin restricciones de aplicación. Estas nociones poseen un grado de generalidad ilimitada.[67] Pero además la teoría de tipos genera una extraordinaria cantidad de complicaciones: exige por ejemplo la distinción de una inmensa cantidad de números y conjuntos numéricos.[68] Es decir, engendra la imposibilidad de afirmaciones sobre todos los números reales.

La observación más elemental que se puede hacer sobre la teoría de tipos es que no es lógica. Es un principio de ordenación, en ese sentido no de existencia como el axioma de infinitud, pero aparece no obstante como un "puente artificial" por encima de las contradicciones. Lo más conflictivo de la teoría es que no permite toda una serie de definiciones en la matemática clásica.[69] Para salir de estas dificultades es que se tuvo que recurrir precisamente al axioma de reducibilidad. El principio del círculo vicioso es el que está en la base de la teoría de tipos y prohíbe el uso de las llamadas funcioizes impredicativas. Con la teoría de tipos podemos decir que Russell buscaba una predicativización de las matemáticas, pero esto sólo lo logra a medias. El problema inedular reside en la pregunta: ¿es la matemática predicativa?

Las matemáticas clásicas no parecen serlo, y pretenderlo abre el camino a la introducción de axiomas que son *non gratos* para el logicismo. La teoría de tipos, por otra parte, también conecta necesariamente con el axioma de elección [70] y con el de infinitud. [71] De nuevo el problema de la fundamentación matemática no lleva a una solución en un marco reducido como al que apunta la teoría de tipos; la predicatividad o no de las matemáticas sólo puede abordarse con una discusión sobre la naturaleza de la matemática.

No se pueden lanzar por la borda todas las definiciones impredicativas porque algunas de éstas han engendrado paradojas; menos aún, cuando gran parte de las matemáticas se van con ellas. Lo que se plantea es entonces la redefinición del carácter de las entidades matemáticas (de las definiciones, que son el lugar privilegiado de su "producción").

La teoría de tipos y los axiomas no lógicos del logicismo russelliano son la manifestación más elocuente de su fracaso material. Pero las dificultades se siguen las unas a las otras. El análisis matemático clásico contempla proposiciones infinitas por doquier.

Sin la posibilidad de hacer valer este tipo de proposiciones una auténtica fundamentación no sería posible.[72] El problema del infinito está conectado a la asunción de las totalidades en general. El infinito actual al igual que otras entidades matemáticas es una totalidad. Esta noción entonces está conectada a la de las clases y también a la del Continuo. Es necesario que demos algunas ideas metodológicas. No puede existir para los sentidos o la conciencia actuales de un hombre un número infinito de cosas. Pero un concepto de número infinito actual puede servir dentro de una teoría de la que pueda extraerse un modelo que exprese cierta realidad. A lo que se referiría no sería a un objeto infinito en sí sino a uno que puede ser subjetivizado como tal. Es decir, lo infinito puede entenderse como un concepto que en la conciencia puede equivaler a algo ilimitado en lo actual. Determinar, por otra parte, si existe en la realidad material un número infinito de cosas, simplemente, lo infinito, no es un problema teórico, sino práctico y, probablemente, irresoluble. No se puede entonces afirmar como hipótesis de lo real, universal y absoluta. Pero si se entiende como una entidad abstracta subjetivizada, reducida a los límites de lo "humano", entonces su validez está en dependencia de la funcionalidad teórica y práctica que de su asunción se obtenga. Para nuestra matemática de hombres limitados, finitos, las nociones del infinito numérico (aritmético o analítico) no son necesariamente inútiles y sin fundamento. El fundamento no está en la realidad en sí (pensar así nos conduciría a un callejón sin salida científica) ni en la subjetividad interior en sí (que nos conduce a la esterilidad). El fundamento tampoco está en inteligentes recursos "técnicos", está en una adecuada interpretación epistemológica, ontológica, de los límites y condiciones del conocimiento humano.

V. El paso de la aritmetización del análisis o la geometría implica la consideración del problema del continuo; implica, en particular, la necesidad de tomar decisiones en torno a totalidades numéricas. Aritmetizar la geometría condujo al mismo tipo de problemas del mismo proceso en el análisis. El análisis real es una de las formas precisas matemáticas a través de la cual se da cuenta de lo que aprendemos como la continuidad del objeto exterior. El continuo es un concepto para referirnos a una realidad material particular, pero no es en sí. La continuidad de puntos físicos no existe. El vacío —lo discontinuo— todo lo invade, siempre está presente. Es la eterna relación dialéctica entre el ser y la nada. Ahora bien, lo que los hombres detectamos sensiblemente como continuo es relativo. Es totalmente válido plantearlo entonces como concepto teórico, si está conectado a una interpretación, a un marco teórico (y a una utilidad en ellos) en relación con lo real. La definición (como modelo) de lo continuo en un primer momento es el tema del análisis. Las matemáticas de lo continuo son importantes en la relación del sujeto humano con lo real que le es exterior. Las conclusiones teóricas dentro del modelo de lo continuo (en las matemáticas) no están alejadas del sustrato material del que ha partido. Por eso las matemáticas del continuo pueden dar resultados prácticos. Por otra parte, lo continuo es diverso; lo que debería conducir a varios modelos matemáticos de la diferente continuidad y servir éstos en diferentes aplicaciones. En resumen, lo continuo como concepto se refiere a una realidad que aparece en la relación material sujeto-objeto; por lo tanto: "lo continuo en sí no existe", depende del sujeto. En esta noción existen plasmados diferentes referentes, por lo que es necesario conceptualizar diferentes continuidades; es decir, entonces, diferentes modelos matemáticos.

La introducción de las nociones de infinito en los números naturales o los reales, o la referencia al continuo, debe corresponder a criterios epistemológicos generales y a requerimientos teóricos funcionales. La existencia o verdad de totalidades transfinitas no depende de reglas que aseguren consistencia formal, o de simbolizaciones que permitan construcciones en un proceso algorítmico. Tampoco se pueden negar de principio, o inversamente usar sin criterios teóricos claros. La primera actitud (la simple negación) impide avanzar la práctica matemática; la segunda, que es la forma con que las aborda el logicismo, conduce a un camino lleno de incertidumbre. De nuevo la discusión entra en la filosofía. El platonismo está presente en el proyecto logicista de una manera muy profunda.

La misma cuantificación se hace sobre totalidades diversas, sin vertir criterios adecuados para la fundamentación de su introducción. Es difícil saber si la no unificación por parte de los griegos de la geometría y la aritmética no estaba conectada a problemas relacionados con el infinito y el continuo; lo que a todas luces es innegable es que esta situación les impidió construir el modelo de los números reales, el análisis. Tal vez, las necesidades de la aplicación científica y técnica griegas no reclamaban un modelo matemático de lo continuo. De todas maneras es probable que existieran diversas condiciones históricas, sociales y culturales, aparte del prejuicio frente al infinito o a lo desconocido, en la determinación de su aproximación. El análisis real ha sido un salto progresivo en las ciencias y las matemáticas y su éxito ha sido medido ya en su conexión con el dominio de la naturaleza por los hombres. Sería necesario discutir si esto constituye ya criterio suficiente para su aceptación, independientemente de otros de consistencia, constructibilidad, utilidad, en un sistema formal. En lo que se refiere al logicismo, la aceptación sin más de totalidades y diversas entidades matemáticas es una seria debilidad epistemológica, que no se puede remediar con la actitud contraria, ni tampoco en una inexacta transmutación de lenguaje. La crítica al platonismo logicista ha sido muy incisiva. Los editores de esta magnífica antología Phitosophy of Mathematics señalan dificultades a la visión platónica incluso en la introducción misma de la noción de conjunto:

> El lector tal vez se preguntará: qué hay de malo con nuestra explicación precedente "conjunto arbitrio" significa "cualquier conjunto, ya sea dado por una regla o por el azar". La dificultad es que la noción de azor no tiene sentido en matemática pura, excepto como una manera de hablar. Supongamos, como sea, que tomamos esta explicación literalmente: debemos, por ejemplo, definir una "sucesión arbitraria de enteros" como una sucesión que pueda ser generada por un "mecanismo del azar". Una dificultad es entonces la palabra "pueda". "Pueda" sólo puede significar una posibilidad matemática aquí, puesto que no queremos que las leyes físicas tengan efecto sobre la verdad matemática Pero "posibilidad matemática" es ella misma una noción disputada en donde están concernidas las estructuras infinitas.[73]

Pero, añaden:

> Y una ulterior dificultad es que, de acuerdo a las matemáticas clásicas, hay otros conjuntos infinitos, por ejemplo, el conjunto de todos los conjuntos de conjuntos de números reales, los cuales son tan "grandes" que no pueden ser puestos en una correspondencia uno a uno con el conjunto de todos los enteros o incluso con el conjunto de todos los números reales: tales conjuntos no pueden ser idénticos al "out put" de ningún proceso físico posible, inclusive si nosotros tomásemos la noción de un "proceso físico posible" (de hecho infinito) como una noción ella misma clara. [74]

Su opinión es que en el mundo físico no se puede encontrar un "modelo standard" para la teoría de conjuntos. [75]En mi opinión esta afirmación última no es adecuada porque no deja claro lo que realmente se persigue con las matemáticas. En esencia, no se trata de dar modelos de lo que existe en sí, sino modelos que puedan jugar un papel adecuado y útil en la relación hombres- realidad. Es la misma metodología con la que abordé la introducción de los infinitos y las nociones de lo continuo la que debe prevalecer también aquí. Pero además hay oraciones (como la "hipótesis del continuo") que no son susceptibles de un procedimiento de verificación o refutación: esto sólo puede generar dudas sobre la noción de clase.[76]

Lo que está claro y se pone de manifiesto en las observaciones de Putnam y Benacerraf es que en el logicismo no encontramos una clara justificación de las nociones fundamentales involucradas en su proyecto y, también, está claro que esto debe obedecer no sólo a una actitud liberal con ellas sino a una actitud filosófica particular. Detrás de una aproximación en unas partes del próyecto y otra diferente én otras la filosofía está presente.

Esto hace muy importante el análisis metículciso de las premisas filosóficas que se encuentran en la obra de Frege como de Russell. En este caso hemos hecho girar la discusión en tórno' al platonismo, cuyo defecto más importante tal vez sea precisamente la utilización de nociones y entidades sin una adecuada justificación teórica y epistemológica, aparte del apuntalamiento simple de su existencia, Pero hay más problemas en el logicismo.

VI. En el proyecto logicista no se demuestra que cuando se pasa de proposiciones matemáticas a propiamente lógicas se conserva la propiedad de ser lógica[77] La crítica conduce a la discusión acerca de si los métodos de la reducción logicista son apropiados. Si la substitución "extensional" de proposiciones y las manipulaciones lógicas son adecuadas en ese proceso. Yo opino que la reducción posee sentido y los métodos usados, en general, también. Lo que el análisis filosófico exige es que se entienda la reducción siempre como un proceso de abstracción, en el cual se generan consecuencias que son necesarias de conocer, prever teóricamente que toda abstracción engendra un terreno determinado que posee implicaciones (a veces incognocibles) de una u otra forma. La búsqueda de sus fronteras conecta nuevamente con la epistemología; es parte de una reflexión fundamentadora. Cuando se argumenta que no es posible en la reducción logicista no señalar ni la propiedad lógica ni la propiedad matemática como idéntica a ella, o no se demuestra como tercera propiedad diferente a las anteriores pero que se hereda en la reducción, estamos reconociendo la oscuridad y debilidad del proyecto. Tiene razón Körner cuando exige al logicismo que demuestre las características que aparecen en la reducción.

No basta pensar que se captan intuitivamente, al instante, como sugirió Frege. Russell fue más prudente en esto y Quine ha llegado a reconocer incluso la ausencia de este tipo de demostraciones en el logicismo. Ahora bien, Quine es un logicista "extraño" (por lo menos en la época en que afirmaba la no separación entre lo analítico y lo sintético), [78] puesto que su postura, como señala Körner,[79] afecta la aproximación filosófica del logicismo. Para Frege y para Russell las proposiciones lógico-matemáticas eran *a priori*, analíticas o algo parecido. Lo que se concluye de estas argumentaciones, es, por lo menos, la ausencia de claridad filosófica en el logicismo. La distinción entre lógica y matemática es para ellos casi imposible. Esta es una gran debilidad filosófica.

Körner señala una objeción más al proyecto logicista: la asunción de los axiomas no lógicos genera problemas más allá de las repercusiones que eso tiene en la lógica operatoria; tiene efectos en la "extensión de los diferentes conceptos utilizados".[80] En efecto, si se usa la totalidad infinita de naturales como base de definición de cada número natural, éste depende en cierta forma de esa totalidad; lo que no sucede si se asume la colección de naturales como finita. La situación se vuelve transparente cuando en lugar de hablar del 2, hablamos de 2 manzanas. Para Körner el logicismo hace una "fusión" indebida de conceptos a priori y a posteriori, que él llama no empíricos y empíricos. Para Korner se debe diferenciar claramente las dos cosas y piensa que no tiene por qué existir una correspondencia entre los números empíricos y los no empíricos.[81] Afirma que en el logicismo se asume:

> …primero, que resulta siempre claro si un concepto está o no en una determinada relación lógica con otro, y, un segundo lugar, que las relaciones lógicas posibles entre conceptos matemáticos no son esencialmente distintas de las que pueden subsistir entre conceptos empíricos. Estos dos supuestos son erróneos uno y otro.[82]

Si bien es cierto que las reglas de un sistema formal deductivo' matemático y abstracto no son iguales a las de su aplicación de una manera absoluta, no son identificables puesto que suponen procesos de abstracción intermedios, no es posible, sin embargo; afirmar la gigantesca distancia entre ellos que pone Kórner. Para éste la diferencia entre lo exacto de unos y lo aproximado de los otros basta para definir caracteres diferentes a sus reglas. Esto es muy delicado. Las reglas de la matemática "ideal" corresponden de una manera general al devenir de lo real, al mundo en el que se da la experiencia. No son un reflejo mecánico, es cierto. Sólo pueden aprenderse como producto de una relación estrecha entre el sujeto y el objeto. La correspondencia así establecida permite la aplicación, aunque a veces no se logre. En esos casos las razones no están sólo en las reglas sino en las nociones primitivas que se han introducido. La descripción teórica precisa de cómo aparece cn particular esta correspondencia es una tarea científica esencial. Cuando Kirner dice que no existe correspondencia "inclusive en el caso del "Número Natural",[83] refiriéndose a los números engendrados por la suposición en un caso y en el otro no de la infinitud, no hace más que girar sobre sus propios criterios. Cuando habla de una proposición matemática no empírica como exacta y no aproximada, el que decidió esto es él. Aproximado ¿a qué? Decir 2 o decir dos manzanas, decir 2 + 3 = 5, o dos manzanas más tres manzanas dan cinco manzanas, no nos parece que conduce a la dicotomía de lo exacto y lo aproximado.

Nos coloca ante una regla abstracta válida en tanto funcione como modelo que -expresa cierta realidad. Que sea caracterizada como aproximada no depende de ella misma, sino de nociones y criterios más generales. Toda proposición rnatemdtica es abstracta, con un referente inmediato o mediato, por lo tanto: siempre será aproximada. Lo que sucede es que Körner establece la separación de dos mundos: lo empírico —a posteriori, y lo a priori.

Existen en esa interpretación dos matemáticas, las puras y las aplicadas. Parte de premisas a priori sobre la naturaleza de la matemática. Yo no creo en esa separación teórica como tampoco comparto la separación total entre lo analítico y sintético; un dogma que (a diferencia de lo que dice Quine) no ha' sido sólo de los 'empiristas, sino de la mayoría de corrientes de la filosofía de las matemáticas. Lo que debe quedar claro aquí es que no es indiferente la suposición o no de los axiomas no lógicos del logicismo en la caracterización de los números. También debe quedar claro que las proposiciones de la 'matemática no están todas a la "misma distancia" del mundo real, pero están entre sí estrechamente conectadas y, en su conjunto, pueden corresponder a sectores de lo real (las nociones de correspondencia, de realidad. deben verse con una óptica en la que el sujeto participa).

VII. 'Es necesario it sacando conclusiones sobre las materializaciones partkulares del logicismo. El problema de las paradojas fue el mótor de la aproximación russelliana, así como había sido la fuente del agotamiento de la de Frege. Pero ‘lo que en rrege no era evidente en Russell sí lo es: el fracaso del logicismo. No en términos técnicos, formales, lógico-matemáticos, sino en términos filosóficos. La segunda etapa del logicismo pone de manifiesto los problemas teóricos de una reducción artificial y abstracta de la matemática.

Pone de manifiesto que la relación entre matemática y lógica no era tan estrecha como se suponía; que se trataba de dos cuerpos teóricos distintos, aunque con intersección no vacía. Pero, sobre todo, evidencia que la búsqueda del fundadamento de las matemáticas no puede encontrarse en la lógica. La vieja hipótesis que hacía de la lógica ese lugar tan “cercano al cielo” para ser suscep.tible de validar los conocimientos que le fuesen acercados, ya no sirve con la matemática. Algún día también desaparecerá aquella premisa que establece esa “cercanía” de la lógica. Para Frege como para Russell la lógica estaba colocada en un lugar muy especial. Para Frege la aritmética también era el mundo donde las verdades son absolutas, “. . . timeless”. Digo que es solamente un fracaso filosófico porque, con todo y axiomas no lógicos, con todo y las dificultades que los sistemas del Grundgesetze o Principia manifiestan, no se deja de alcanzar una coherencia (en la medida de lo teóricamente posible), rigor, y fundamentación de las principales partes de la matemática. Pero el principio logicista se hace pedazos en esta segunda etapa.

Las paradojas de la teoría de conjuntos, los problemas derivados de las definiciones circulares impredicativas, no son (como creía Russell) problemas en la lógica de la fundamentación matemática. Que la teoría de clases que requiere la matemática engendre paradojas que a su vez exijan axiomas y principios “extraños”, no es problema ni de la lógica ni, opino, de la teoría de clases, sino de la naturaleza de las matemáticas. Y no me refiero a que las matemáticas sean una fuente de contradicciones. Los conceptos y entidades de la matemática deben estar plenamente justificados en la teoría y, en• general, en las condiciones de su relación con su objeto. La determinación de los mecanismos que permitan esto deben estar conectados a un tratamiento adecuado de la epistemología. La producción matemática de los siglos XVIII y XIX (caracterizada por su extraordinaria abstracción) impuso a su vez la búsqueda de mayores recursos teóricos en esa dirección. Las paradojas, al mismo tiempo que expresan las consecuencias de una rçducción-abtraccjó artificial, pusieron de manifiesto dificultades en la introducción de entidades y conceptos matemáticos. Era, en ese sentido, una crítica al platonismo en ñaemátkas. Un llamado no a la aplicación mecánica de la navaja de Occam, aas sí a la “moderación” y a la redefinición de criterios. En otro orden de cosas, el “factor paradojas” y la gama de consecuencias que trajo debe verse como un primer señalamiento de los límites de la formalización de los cuerpos teóricos.

La teoría de tipos y los axiomas de existencia del logicismo dejan una sensación de artificialidad, que no corresponde ni con el proyecto logicista ni con la naturaleza de las matemáticas. Toda esta artificialidad que exige la reducción logicista encuentra un punto de acumulación en la aritmética. *Un principio fundamental de ésta es la inducción; éste apunta a aquélla que define la esencia de la aritmética. No es extraño entonces que para integrar éste en el sistema logicista se requiera introducir axiomas que no tienen nada que ver con la lógica.* La reducción de un cuerpo teórico a otro (entre los cuales su objeto epistemológico no es el mismo) sólo puede hacerse a partir de una abstracción que involucra nociones y principios diferentes. Toda abstracción arrastra consigo una secuela de implicaciones. La extensión de esta secuela dependerá del tipo de abstracción. Cuando se trata de reducciones entre complejos teóricos dependerá del distanciamiento teorético entre ellos que, a su vez, está conectado a la diferenciación entre sus objetos epistémicos.

La visión logicista de la naturaleza de las matemáticas apuntala los aspectos formales y deductivos, axiomáticos, de las matemáticas. Parte de una clara distinción entre el conocimiento a priori y el a posteroiri. La matemática no está conectada a la realidad de un manera directa. En Russell el camino de su evolución conduce a hacer de las proposiciones matemáticas parte del lenguaje, y, en ese sentido, convenciones introducidas por los hombres. Para éste la matemática va a terminar siendo "verbal". Esta aproximación que enfatiza lo sintáctico no es, sin embargo, uniforme en la conciencia de Russell toda su vida. De hecho, durante bastantes años mantiene que la lógica se refiere a las cosas del mundo. En 1918 Russell decía que la lógica es formal. Veamos lo que entendía por ello: La "forma" de una proposición es lo que permanece invariable en ella, cuando cada parte constituyente de la proposición es reemplazada por otra.[84]

Entonces, añadía:

Las constantes lógicas pueden ser definidas exactamente como del inimos a las formas; de hecho son en esencia lo mismo.[85]

Las proposiciones lógicas entonces deben expresarse a través de "constantes lógicas" y "variables".[86] Pero, advierte Russell:
…no se deduce de esto que, recíprocamente, todas las proposiciones que se puedan expresar de esta manera sean lógicas.[87]

La lógica entonces es formal por esta reducción a constantes lógicas; ahora bien, como esto no es suficiente debe reciirrirse a nombrar una característica propia exclusiva a ésta. Russell dirá:

> Todas las proposiciones de la lógica tienen una característica que habitualmente se expresaba diciendo que eran analíticas, o que sus contradictorias eran contradictorias en sí mismas. No obstante, esta afirmación no es satisfactoria. La ley de contradicción no es más que una de las proposiciones lógicas; no tiene preeminencia especial y la prueba de que la contradictoria de una proposición es contradictoria en sí misma equivale a exigir otros principios de deducción además del principio de contradicción. Sin embargo, la característica de las proposiciones lógicas que tratamos de encontrar es la que fue considerada y se intentó definir por los que dijeron que ella consistía en su deducibilidad del principio de contradicción. Esta característica, que por el momento podemos calificar de tautología, no proviene, evidentemente, de la afirmación de que el mimero de individuos del universo es u, cualquiera que sea el námero n. [88]

Esta característica que define a la lógica se nombra, pero no está claro aquí qué es exactamente, ¿ qué es lo que hace que proposiciones expresadas de manera lógica no sean proposiciones lógicas? Para Russell el terreno de la definición de la matemática está en la noción clásica de "analiticidad" [89] (tal vez un poco reformulada). En 1918 confiesa que no ha encontrado una definición "que me satisfaga completamente".[90] El marco en el que se mueve Russell aquí tiende a llevarlo a las definiciones "lingüísticas" de la lógica y la matemática; el sentido de la introducción de lo anaiftico eso parece indicar. Pero Russell, aún en esta fecha, no ha dejado de considerar la lógica como supuestos a priori a propósito del mundo de las cosas. Gcidel cita la Introducción a (a Filosofía Matemática de Russell, en una frase que fue suprimida en ediciones posteriores: La lógica trata del mundo real, lo mismo que la zoología, aunque de sus rasgos más abstractos y generales.[91] Gödel no deja de comentar, sin embargo, que:

> Es verdad, sin embargo, que esta actitud ha ido disminuyendo gradualmente con el paso del tiempo y también que siempre fue más fuerte en la teoría que en la práctica. Cuando se enfrentaba con un problema concreto, los objetos a analizar (por ejemplo, las clases o las proposiciones) se convertían pronto y en su mayor parte en "ficciones lógicas". Aunque quizá esto no signifique necesariamente (de acuerdo con el sentido en que Russell utilizaba este término) que estas cosas no existan, sino únicamente que no tenemos una percepción directa de ellas.[92]

La diferencia entre teoría y práctica que arriba se señala obedece a la conjunción de actitudes filosóficas distintas a Russell; y donde, en especial, el "factor paradojas" generaba un llamado de auxilio a la navaja de Occam. Godel comparte con Russell la comparación que éste hace entre las matemáticas y una ciencia natural.[93] El sentido de la lógica del Russell de esta etapa (al igual que 'en Frege) no es sintáctico, sino semántico. En esta etapa la lógica apunta, si se quiere, a una cosmología,[94] como bien señala Largeault: …reprocha a la caracterización sintáctica el introducir una arbi- trariedad y una libertad inadmisibles: no acepta los lenguajes lógicoso poshilados variables de Carnap.[95]

La lógica posee entonces dos aspectos: por un lado, uno lingüís— tico, y por el otró, - uno ontológico.[96] Lo que predomina aquí es el primero. De hecho, la crítica al formalismo pone de manifiesto ese "sentido de la realidad" que interviene en la descripción de su interpretación de la lógica y las matemáticas.

El logicismo de Russell apuntala el paradigma "formalizante" pero (al igual que Frege) a medias. En Frege predomina siempre el reconocimiento de un mundo ideal, lo que determina un fuerte platonismo en su filosofía de las matemáticas. En Russell el mundo ideal también es reconocido en un principio pero a la par de un fuerte sentido de la realidad, así como una inclinación nominalista en la resolución de los problemas teóricos específicos.

Con Russell terminó una nueva etapa en los intentos por brindar una fundamentación logicista a las matemáticas. Es posible afirmar después de los trabajos de Frege y Russell que el Logicismo fracasó. Pero no sólo debido a dificultades "técnicas" o de manipulación lógica, ni siquiera por un supuesto tratamiento inadecuado de los sistemas formales usados. La raíz de los problemas se encuentra en la visión logicista del conocimiento matemático, en la conexión que se plantea de este y la realidad material, en los papeles epistemológicos asignados al sujeto y al objeto en la construcción matemática. La raíz de los problemas se encuentra en el terreno filosófico.

El logicismo va a fracasar en dotar a las matemáticas de un fundamento último. Sin embargo, con ello no se destruiría el paradigma racionalista axiomatizante de las matemáticas. Para Hilbert y el formalismo los problemas del logicismo podían ser superados en una visión que afirmaba la posibilidad de la demostración de la consistencia en la aritmética, y que hacía de la "intuición del siguo" su punto filosófico de partida. El fracaso del logicismo no fue visto antes de la década de los treinta realmente como un cuestionamiento profundo a los sistemas axiomático-formales y al racionalismo. Serían necesarios los resultados de Gidel para apenas crear condiciones teóricas que permitieran debilitar el racionalismo en matemáticas, y abrir posibilidades para una reconstrucción teorética de la reflexión sobre las matemáticas. En el fracaso del logicismo, y después de los resultados gideIianos de los treinta, tal vez pueda entonces leerse un fracaso de los intentos por brindar un fundamento absoluto a las matemáticas.

Notas

---

[1] Barker, Stephen F. Filosofía de las matemáticas. Trad. Carlos Moreno Caíadas. México: UTEHA, 1965. p. 126.
[2] Cf. Russell, B. (1964). *La evolución de mi pensamiento filosófico.* Trad. Juan Novela. Madrid: Aguilar. pp. 71.
Sin embargo, Russell desconocía los trabajos de Frege durante la mayor parte de esos años. Para la publicación de *Los Principios* añadió un apéndice sobre Frege, pero el grueso de esta obra ya estaba escrito. Russell no llega al proyecto logicista por Frege (y le hace correcciones). Su asunción es motivada por su propia evolución filosófica.
[3] Russel, B. (1969). *Escritos Básicos 1903-1959.* (Comp. Robert Egner y Lester Denonn). Trad. varios, México: Aguilar. pp. 231.
[4] Russell, B. (1928). *Los principios de la matemática.* Trad. Joaquín Xirau. Barcelona: Editorial Labor. pp.33.
[5] Putnam, H. y Benacerraf, P. (Edit.). (1964). *Philosophy of mathematics.* Selected readings. New Jersey: Prentice Hall. pp. 9.
[6] Frege, G. (1972). *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos.* Trad. Hugo Padilla. México: UNAM. pp. 191-192.
[7] Putnam, H. y Benacerraf, P. Ob. Cit. pp. 31.
[8]Cf. Hempel, C. *On the nature of mathematical truth*, en: Brody, Boruch; Capaldi, Nicholas (Edit.). (1968). *Science: Men, methods, goals.* A reader. New York: WA Benjamín, Inc. pp. 288, 289.
[9] Cf. Ibid: "Las proposiciones de la matemática tienen, entonces, la misma certeza incuestionable, que es típica de proposiciones tales como "Todos los solteros son no casados", pero ellas también comparten la falta completa de contenido empírico asociado con esa certeza. Las proposiciones de la matemática están vaciadas de todo contenido fáctico; no transmiten información sobre ningún material empírico". p. 289. Esta visión es la típica de los filósofos del Círculo de Viena (expresa la renuncia teórica a dar cuenta de la naturaleza y la verdad en las matemáticas).
La visión de Hempel del logicismo no es la misma que afirmaban Frege o Russell; es una visión que surgió después del desarrollo logicista, pero que conectó éste a una aproximación sobre la naturaleza de la lógica y la matemática. De hecho la evolución del logicismo en esta segunda etapa, condujo a la larga a una visión similar por parte del mismo Russell, pero no es así en el principio.
[10] Cf. Quine, W. (1962). *Desde un punto de vista lógico.* Trad. Sacristán, M. Barcelona: Ediciones Ariel. pp. 125.
[11] Cf. Ayer, A. (1972). *Russell.* Fontana Modero Masters (Editor Frank Kermode), London. pp. 44
[12] Cf. Putnam, H. y Benacerraf, P. Op. Cit. pp. 10.
[13] Wilder, R. (1956). *Introduction to the foundation of mothemaurs.* New York: John Wiley & Sons. pp. 211.
[14] Ibid. pp. 215.
[15] Ibid. pp. 225.
[16] Cf. Russell, B. (1945). *Introducción a la filosofía matemática.* Trad. Molinari, J. Buenos Aires: Losada. pp. 23.
[17] Cf. Russell, B. (1945). *Introducción a la filosofía matemática.* Trad. Molinari, J. Buenos Aires: Losada. pp. 23.
[18] Ibid. pp. 25.
[19] Ibid. pp. 32.
[20] Ibid. pp. 33.
[21] Ibid. pp. 35.
[22] Ibid. pp. 36.
[23] Russell. *La evolución de mi pensamiento filosófico*. pp. 72.
[24] Cf. Körner, S. (1969). *Introducción a la filosofía de la matematica*. Trad. Gerhard, C. México: Siglo XXI. pp. 177.
[25] Russell. *Los principios de la matemática.* pp. 589.

[26] Cf. Ibid. pp. 589.
[27] Russel. *Introducción a la filosofía matemática.* pp. 47.
[28] Russel. *Introducción a la filosofía matemática.* pp. 47.
[29] Cf. Russell. *Los Principios de la matemática*. pp. 594.
[30] Russell, B. (1966). *Lógica y conocimiento*. Trad. Javier Muguerza. Madrid: Taurus Ediciones. pp. 102.
[31] Ibid. pp. 102, 103.
[32] Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas.* Trad. Jesús Hernández. Madrid; Alianza Editorial. pp. 55, 56.
[33] Cf. Ibid. pp. 52.
[34] Carnap, R. *The logicist foundations of mathematics*. En: Putnam, H. y Benacerraf, P. Op. Cit. pp. 35.
[35] Ladriére, J. (1969). *Limitaciones internas de los formalismos.* Trad. Blasco, J. Madrid: Editorial Tecnos. pp. 80.
[36] CI. Russell. *Lógica y conocimiento*. pp. 112.
[37] Ibid. pp. 112, 113.
[38] Ibid. pp. 110, 111
[39] Russell. *Introducción a la filosofía matemática.* pp.266.
[40] Russell. *Introducción a la filosofía matemática.* pp.266.
[41] Ibid. pp. 267.
[42] Ibid. pp. 267.
[43] Díaz, E. (1975). *El teorema de Gödel*. Pamplona: Ediciones Universidad de Navarra, S. A. pp. 88, 89.
[44] Russell. *Introducción a la Filosofía Matemática*. pp. 187.
[45] Ibid. pp. 186
[46]Kline, M. (1980). *Mathematics. The loss of certainty*. New York: Oxford University Press. pp. 210.
[47]Kline, M. (1980). *Mathematics. The loss of certainty*. New York: Oxford University Press. pp. 210.
[48] Russell. *Introducción a la filosofía matemática*. pp. 187.
[49] Cf. Ibid. pp. 189.
[50] Kneale, William y Martha. (1972). *El desarrollo de la lógica*. Trad. Javier Muguerza. Madrid: Editorial Tecnos. pp. 622.
[51] Russell, *Introducción a la filosofía matemática*. pp. 253.
[52]Gödel, K. (1981). *Obras completas.* Trad. Mosterín, J. Madrid: Alianza Editoria1. pp. 303.
[53] Ibid. pp. 304.
[54] Ibid. pp. 304.
[55] Ibid. pp. 305.
[56] Ibid. pp. 306.
[57] Ibid. pp. 308.
[58] Barker. Op. Cit. pp. 124.
[59] Cf. Black, M. (1957). *The nature of mathematics.* London: Routledge y Kegan Paul Ltd. pp. 77.
[60] Ibid. pp. 80.
[61] Ibid. pp. 83.
[62]Quine, W. (1977). *Filosofía de la lógica.* Trad. Sacristán, M. Madrid: A1ianza Editorial. pp. 120.
[63] Ibid. pp. 121.
[64] Ibid. pp. 121.
[65] Ibid. pp. 118.
[66] Cf. Quine, W. (1969). *Los métodos de la lógica*. Trad, Sacristán, M. Barcelona: Editorial Ariel. pp. 239.
[67] Cf. Kneale. Op. Cit. pp. 622, 623.
[68] Cf. Ibid. pp. 621.
[69] Cf. Kline. Op. Cit. pp. 622.
[70] Cf. Ibid. pp. 223.
[71] Barker. Op. Cit. pp. 136.
[72] Körner. Op. Cit. pp. 57.
[73] Putnam, H. y Benacerraf, P. Op. Cit. pp. 16.
[74] Putnam, H. y Benacerraf, P. Op. Cit. pp. 16.
[75] Cf. Ibid. pp. 17.
[76] Cf. Ibid. pp. 16.

[77] Cf. Körner. Op. Cit. pp. 66.
[78] Cf. Quine. *Desde un punto de vista lógico*. pp. 10.
[79] Cf. Körner. Op. Cit. pp. 68.
[80]Cf. Ibid. pp. 71, 72 ss.
[81] Cf. Ibid. pp. 73.
[82] Ibidem.
[83] Ibidem.
[84] Russell. Introducción a la filosofía matemática. pp. 277.
[85] Ibid. pp. 279.
[86] Ibid. pp. 281.
[87] Ibídem.
[88] Ibídem.
[89] Cf. Ibid. pp. 283.
[90] Ibid. pp. 284.
[91] Gōdel. Op. Cit. pp. 299.
[92] Gōdel. Op. Cit. pp. 299.
[93] Cf. Ibid. pp. 300.
[94]Cf. Largeault, J. (1970). *Logique et Philosophie Chez Frege*. París: Editions Nauwelaerts. pp. 69.
[95] Ibid. pp. 65.
[96] Ibid. pp. 68.