IMPLICACIONES TEORICO—FILOSOFICAS DEL TEOREMA DE GOEDEL EN EL PARADIGMA RACIONALISTA DE LA REFLEXION SOBRE LAS MATEMATICAS

Ángel Ruiz
www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz

Referencia: año 1985. Revista de Filosofía de la Universidad de Costa Rica, Volumen XXIII, No 58, Editorial Universidad de Costa Rica.

Resumen

En este trabajo se busca establecer una interpretación histórico-filosófica de algunas de las características centrales de la reflexión moderna sobre las matemáticas en relación con el paradigma racionalista en la teoría del conocimiento. Se incide en la problemática de los Fundamentos de las Matemáticas y se delinea un balance filosófico del Racionalismo a partir de los resultados godelianos, se señala la necesidad entonces de una revolución teórica en la Filosofía de las Matemáticas y en la Epistemología moderna

Summary

(Theoretico-philosophical implications of Gödel's Theorem on rationalist paradigm in reflection about Mathematics). In this article we seek to establish an historical and philosophical interpretation of some main characteristics of modern reflection about Mathematics related to rationalist paradigm iii knowledge theory. We analize mathematical foundations clasic problematic and intend to delineate a philosophical assessment of Rationalism from gödelian results, we show therefore the need of a theoretical revolution in Philosophy of Mathematics and modern Epistemology.

Introducción

A la par del llamado "conocimiento positivo" de las ciencias siempre ha estado presente una componente especulativa-metodológica, filosófica, no "demostrable" por la vía de la evidencia experimental. En el decurso histórico siempre se ha dicho que el conocimiento positivo ha ido "robando terreno" a la componente especulativa, que, en efecto, en muchas ocasiones ha estado conformado por figuras meramente metafísicas o teológicas incapaces no solo de ayudar al primero, sino constituyendo un auténtico obstáculo intelectual.

La especulación filosófica ha representado un intento de los hombres por aprehender por la vía del pensamiento una realidad que se le opone como objeto, de la que es parte, pero que, por las limitaciones de su propia evolución cultural, es incapaz de poseer el grado de evidencia empírica que poseen las ciencias. En este sentido está más cerca de la opinión que estos últimos, aunque sin llegar totalmente a ella. Sus criterios no son tanto de verdad o falsedad, sino tal vez de conveniencia o no, de utilidad, aunque dentro de una visión que busca la mejor aproximación a la realidad.

En el último siglo algunas corrientes filosóficas han intentado desestimar el valor de la especulación filosófica en beneficio de un "cientificismo" que hace de la especulación filosófica metafísica, palabra sin contenido real. Esta actitud parte de un radicalismo inadecuado entre la relación de ciencia y especulación, que nace en la historia moderna de la ciencia. A partir de Galileo se inició una etapa cuantitativa de la ciencia: las magnitudes, las leyes numéricas, la expresión matemática..., han sido privilegiadas frente a las nociones cualitativas, especulativas, de la antigüedad y del medievo. Esta reacción, que va a enfatizar el qué frente al por qué, implicó un extraordinario avance en el conocimiento. La indagación teórica por las causas finales planteaba dificultades diversas social y analíticamente. La visión cuantitativa era necesaria. Pero esta larga fase histórica de la ciencia moderna que ha sido contrapuesta a la filosofía (que también elaboró su propia visión filosófica), no puede implicar la negación de la especulación filosófica en el devenir positivo del conocimiento. El análisis cualitativo, metodológico, filosófico, puede permitir la apertura de mejores derroteros por los que fluya más fácilmente la ciencia. Más aún, es posible pensar que la historia de la ciencia reclama en nuestros tiempos enfatizar nuevamente los aspectos cualitativos, solo que esta vez en una síntesis extraordinaria de los cuantitativos.

En ciertas circunstancias, cuando la elección de un paradigma no se puede realizar debido a la ausencia de suficientes elementos fácticos, la discusión metodológica es esencial. Sobre muchos aspectos centrales del conocimiento esta es la situación planteada.

Los resultados de Gödel dieron una importante información que debe procesarse filosóficamente. A partir de ellos los matemáticos y pensadores reajustaron los esquemas que poseían desde un principio, en algunos casos abriendo terrenos teóricos de gran trascendencia científica. Pero no empujaron en la conciencia teórica hacia una auténtica "ruptura epistemológica". Soy de la opinión que esos resultados no han encontrado la mejor comprensión, y que esta exige introducirlas en el estrato de la filosofía.

La crítica gödeliana recae sobre los aspectos formales y axiomáticos pretendidos absolutos del conocimiento matemático, y su influencia indiscutible en las ciencias (no solo la matemática ha sido vista como "ciencia de los sistemas formales"). La conexión íntima que poseen estos aspectos con el racionalismo moderno, hacen que la crítica recaiga también sobre este.

En los tiempos modernos el racionalismo integró constitutivamente el reduccionismo axiomático y formal, de una u otra forma. Enfrentado con el empirismo, había perdido terreno salvo en las matemáticas. Es en esta última trinchera que Gödel introduce nuevos elementos decisivos.

Algunos autores recientes (por ejemplo Imre Lakatos) sugieren que los resultados de las crisis de los Fundamentos de la Matemática y de los resultados gödelianos abrieron curso a un renacer empirista. Pero esto es muy difícil de precisar. La realidad es, tal vez, que ni el racionalismo ni el empirismo (tal y como lo hemos conocido hasta ahora) parecen satisfacer la mejor comprensión de la ciencia y el conocimiento. Las dos tradiciones están en los orígenes de la sociedad moderna. Sus categorías, métodos y principios han dominado hasta ahora el horizonte epistemológico. En este trabajo, queremos hacer manifiesta la opinión de que los resultados gödelianos no solo afectan la reflexión de las matemáticas sino también la filosofía de las ciencias, la epistemología en general; abren curso a un replanteamiento de la esfera teórica metodológica que arrastramos en la filosofía occidental. Esto que todavía no ha sido totalmente comprendido debe permitirnos iniciar la búsqueda de una visión filosófico-metodológica menos unilateral, menos rígida, más totalizan te, que establezca el sentido filosófico que requiere el desarrollo moderno del conocimiento positivo. El debate sobre esto no es un problema ajeno a la vida y a la historia.

En este trabajo describimos brevemente las características de la reflexión moderna sobre las matemáticas desde Descartes, como prolegómenos a la discusión de los Fundamentos de la Matemática, que es a su vez una introducción a las condiciones básicas en las que emergen los resultados gödelianos. No se pretende aquí un desarrollo técnico, sino filosófico (tampoco exhaustivo). No se pretende tampoco definir los elementos de una nueva visión filosófico-metodológica. Nuestro objetivo es apenas la descripción de una situación histórica y filosófica, en donde prevalece siempre, eso sí, una interpretación teórica.

1. Mientras que en el mundo filosófico aristotélico-escolástico las ideas corresponden de alguna forma al ser, a las cosas, con Descartes el problema epistemológico de la verdad adquiere una dimensión diferente. Los criterios de verdad van a aparecer no en la "correspondencia" con el mundo, sino en condiciones interiores al estrato de las ideas: el rigor, la claridad y la distinción la sustituyen. Las ideas "innatas" son el fin que a través de una intuición racional busca ser aprehendido, al margen de una práctica empírica. El idealismo cartesiano parte de la deducción y la intuición como sus mecanismos instrumentales. El modelo del análisis matemático (especialmente geométrico) es la referencia subyacente. Este reduccionismo a verdades innatas es una relación axiomática.

La conexión de las revoluciones cartesianas cosmológica y geométrica es también la axiomatización, el modelo de la mathesis universalis. La reforma cosmológica parte de la hipótesis de la existencia de un método universal en el conocimiento[1], cuya universalidad viene dada como consecuencia de una unidad racional; es decir, es universal porque es racional. El sujeto determina el carácter del método. La reforma cosmológica reduce todo a la noción de "extensión", pero además a la de "orden". Esta última y la "medida" determinan —para Descartes— lo que es la matemática. También debe añadirse en el marco conceptual la noción de "movimiento". La reducción cosmológica a la extensión no es en Descartes una mera observación empírica. Se trata de una premisa metafísica. A través del cristal de lo "extenso" el mundo va a poder ser desentrañado teóricamente por las reglas de la geometría. Se trata de hacer encajar el mundo en el esquema a priori cartesiano (que es geométrico).

La preocupación principal de la *Géometrie* de 1637 no va a recaer en la geometrización de la física, sino, como señala Brunschvicg en *Les étapes de la philosophie mathématique,* "…opera una transformación de métodos técnicos de la geometría y del álgebra" [2].Una preocupación ajena a las de la *Regulae.* Es a propósito de un problema geométrico planteado por Pappus que Descartes muestra las ventajas de su método abstracto. Para este ya no se trata de aquellos objetos sensibles o susceptibles de una intuición empírica, se trata de una relación interna abstracta, de una concatenación cuyo contenido es en el fondo lógica. Lo absoluto en la geometría sintética de los antiguos es, como diría Spengler, "apolínea", en la geometría analítica es "fáustica". Lo absoluto no es lo aparente, trasciende este plano hacia lo más general y abstracto. No se trata ya de líneas sino de medidas, de valores abstractos susceptibles de ser tratados como objetos aritméticos o algebraicos. Las coordenadas rectangulares son las que enlazan las relaciones geométricas y las algebraicas. En estas últimas se expresa lo que es esencial, la magnitud. Para

Descartes la longitud es la unidad básica, la medición de la realidad espacial. Este es un supuesto teórico cartesiano que permite la aritmetización geométrica, y a partir de ella la descripción analítica del espacio geometrizado.

En el antiguo mundo griego la axiomática era más que nada una forma de sistematización y expresión de las verdades matemáticas. Esta aparecía también como un elemento de las visiones filosóficas clásicas racionalistas griegas. En el racionalismo moderno la axiomática es retomada y potenciada como un elemento central constitutivo de su filosofía. Las implicaciones epistemológicas y ontológicas que esto va a suponer son extraordinarias. El axiomatismo ya no va a ser simplemente un modelo de ordenación cognoscitiva sino la forma de la estructura misma del conocimiento.

Racionalismo y axiomática aparecen como elementos imbricados en la definición del paradigma sobre el conocimiento que más ha influido en la filosofía de las matemáticas. La visión que apuntala el papel mental del sujeto, y hace de condiciones internas al mundo de las ideas criterios de verdad, se establece en los tiempos modernos en estrecha relación con las matemáticas. Va a existir siempre una conexión interna entre la discusión sobre la epistemología en general y la reflexión sobre las matemáticas. El paradigma racionalista se va a nutrir del desarrollo abstracto de las matemáticas y el carácter de este va a ser condicionado, en cierta medida, por el primero.

La quintaesencia del racionalismo "euclidiano" (al decir de Lakatos), que es la obtención-producción de verdades a priori sin relación con el mundo sensible, también aparece desde Descartes conectada con una visión platónica *, es decir una en donde los objetos de la matemática pertenecen a un mundo inmaterial independiente de la creación individual. En la "Meditación Quinta" de las Meditaciones Metafísicas dice Descartes:

> Y lo que aquí encuentro más digno de consideración es que hallo en mí una infinidad de ideas de ciertas cosas, que no pueden estimarse como pura nada, aunque quizá no tenga existencia alguna fuera de mi pensamiento, y que no han sido fingidas por mí, aun cuando tenga yo libertad de pensarlas o no pensarlas, sino que tienen sus verdades e inmutables naturalezas. Como por ejemplo, cuando imagino un triángulo, aun cuando quizá no haya en ninguna parte del mundo, fuera de mi pensamiento, una figura tal como esa, ni la haya habido jamás, sin embargo, no deja de haber cierta naturaleza o forma o esencia determinada de esa figura la cual es inmutable y eterna, y yo no he inventado, y no depende en manera alguna de mi espíritu; lo cual se ve bien, porque se pueden demostrar varias propiedades de ese triángulo, a saber: que sus tres ángulos son iguales a dos rectas, que el ángulo mayor se opone al mayor lado y otros semejantes, los cuales, ahora, quiéralo o no, reconozco muy clara y muy evidentemente que están en él, aun cuando anteriormente no haya pensado de ningún modo en ellos, al imaginar por vez primera un triángulo; por lo tanto, no puede decirse que yo las haya fingido ni inventado [3].

Y, Descartes, concluye con lo que sería el corazón de su argumentación clásica ontológica:

> ..esas propiedades deben ciertamente ser todas verdaderas, ya que las concibo claramente; y por ende son algo y no una mera nada; pues es bien evidente que

> todo lo que es verdadero es algo, siendo la verdad y el ser una misma cosa; y he demostrado ampliamente más arriba que todo lo que conozco clara y distintamente es verdadero[4].

Racionalismo, axiomatismo, platonismo e idealismo aparecen juntos en los orígenes de la filosofía moderna continental europea. Para Leibniz ya no se trata de una axiomática con un cuerpo deductivo basado en una intuición racional, la intuición ya no es la evidencia interior sino que lo son las condiciones internas. Las proposiciones de la matemática "son ciertas porque su negación sería lógicamente imposible" [5]. En Leibniz el sujeto siempre contiene al predicado. Se separa de Descartes, pero, al igual que en Descartes, se sigue afirmando la axiomática, y se sigue sosteniendo el platonismo. De igual forma, esta visión conecta íntimamente con la metafísica, la "monadología", que es un atomismo ontológico reduccionista; si se quiere, una ontología que reproduce la forma axiomática.

Leibniz rompe con la intuición cartesiana, pero la línea del racionalismo los unifica por encima de esa diferencia: la producción de las verdades a priori, la mente que genera la verdad infalible. La conexión Descartes-Leibniz por la vía racionalista es tal vez más estrecha que la que sugiere Beth, en su libro Epistemología Matemática y Psicología, entre Descartes y Kant por la vía del intuicionismo [6]. El reduccionismo cartesiano del conocimiento a las verdades primarias "claras y distintas", "innatas", conecta con el del predicado al sujeto y a la ontología monadológica de Leibniz.

En ambas, por último, la mano divina también termina de resolver las dificultades metafísicas.

La tradición racionalista es enfrentada por el empirismo británico, que, con una ineludible referencia en el desarrollo de las revoluciones científicas e industrial, y en la economía moderna, hace de la experiencia sensorial la única racionalidad válida. La tradición de Bacon, Locke, Hume, etc., enfatiza no los aspectos cerrados (como señala Noel Mouloud en *Les structures, la recherche et le savoir* [7] sino los abiertos, orientados hacia la variedad de la experiencia. En la reflexión sobre las matemáticas, sin embargo, no será sino hasta el siglo XIX (con Mill) que se establecerá la visión empirista clásica, que identifica las nociones matemáticas con situaciones físicas materiales; que establece las leyes matemáticas como inductivas, y su verdad como producto de la mera generalización empírica. El impacto del empirismo (cuya radicalización teórica es el inductivismo) alcanza a influir el decurso racionalista ya en el siglo XVIII. La filosofía de Kant va a tratar de sintetizar las dos tradiciones, aunque en beneficio del racionalismo.

Para Kant, la experiencia en el conocimiento es importante. Comienza su Crítica de la Razón Pura así:

> No se puede dudar que todos nuestros conocimientos comienzan con la experiencia, porque, en efecto, ¿cómo habría de ejercitarse la facultad de conocer, si no fuera por los objetos que, excitando nuestros sentidos de una parte, producen por sí mismos representaciones, y de otra impulsan nuestra inteligencia a compararlas entre sí, enlazarlas o separarlas, y de esta suerte componer la materia informe de las impresiones sensibles para formar ese conocimiento de las cosas que se llama experiencia? En el tiempo, pues, ninguno de nuestros conocimientos precede a la experiencia, y todos comienzan en ella[8].

Sin embargo, continúa Kant: Pero si es verdad que todos nuestros conocimientos comienzan con la experiencia, todos, sin embargo, no proceden de ella...[9].

El conocimiento a priori, las verdades a priori producidas por la Razón, es decir "no aquellas que de un modo u otro dependen de la experiencia, sino las que son absolutamente independientes de ella..."[10], son posibles para Kant. Más aun, al conocimiento a priori (especialmente el sintético) se refiere a la llamada 'Crítica de la Razón pura" [11], que "... es la idea completa de la Filosofía Trascendental" [12].

El racionalismo kantiano, a su manera, integra la experiencia sensorial; la validez de la matemática ya no viene dada por una intuición racional abstracta, ni tampoco por razones lógicas, sino por una intuición espacio-temporal, por una "forma de la sensibilidad pura". No se trata de una intuición propiamente sensorial, empírica: "...las proposiciones propiamente matemáticas son siempre juicios empíricos..." [13]. Las proposiciones de la matemática no son analíticas, son sintéticas a priori.

Para Descartes, Spinoza, Leibniz o Kant, la Razón genera verdades a priori infalibles. Se establece en cada uno cierta combinación teórica a partir del idealismo, platonismo, axiomatismo, o intuicionismo, racional; para Kant el último, espacio-temporalizado, es lo decisivo. Para todos la naturaleza de las matemáticas es a priori, sus verdades necesarias y absolutas. Mucho del carácter de la discusión en la filosofía moderna de las matemáticas (sobre todo alrededor de los Fundamentos), ha girado en tomo a la adopción y uso de estos elementos teóricos presentes en el racionalismo.

Los principios filosóficos de la epistemología moderna empezaron a acuñarse en los siglos XVII y XVIII; los conceptos, las categorías y divisiones en la determinación de la verdad de las ideas y proposiciones entonces fueron establecidas pretendiendo dar cuenta de la estructura de todo el conocimiento. Las fronteras entre las dos tradiciones epistemológicas principales fueron delimitadas. La filosofía de la matemática moderna había sido establecida. En el siglo XIX, el cambio radical en la evolución de las matemáticas, la reformulación simbólica de la lógica, y el empuje de las transformaciones en las ciencias y la técnica en la mentalidad de la época, crearon las condiciones para un replanteo de la filosofía de las matemáticas, y, muy ligada a ella, de la epistemología. Este replanteo que no dio origen a una sola visión filosófica homogénea, motivó, en gran parte, las discusiones sobre los Fundamentos de las Matemáticas.

2. Gottlob Frege partió de las discusiones sobre la naturaleza de la matemática de los siglos XVII y XVIII y, con base en el proceso de abstracción y rigorización en las matemáticas del XIX (que apuntaló los aspectos deductivos y lógicos), retomó la teoría de la evidencia lógica en la aritmética. Sin romper definitivamente con el marco epistemológico kantiano, adjudicó a la aritmética un carácter analítico (contrapuesto al sintético a priori). Frege reformuló la noción de analítico en términos lógicos. En su *Grundlagen des Arthmetik* señalaba:

> El problema es el de encontrar su prueba y seguirla hasta las verdades primitivas. Si en este camino sólo se encuentran definiciones y leyes lógicas generales entonces se trata de una verdad analítica[14].

La lógica ocupa un papel privilegiado en Frege; está conectada, en cierta medida como en Boole, a las leyes profundas del pensamiento. La aritmética está por encima del resto de la matemática, es lógica. En el mismo libro esto es evidente, pregunta:

> No yace la base de la aritmética a mayor profundidad que La de cualquier conocimiento empírico, a mayor profundidad que la de la misma geometría? Las verdades aritméticas gobiernan el campo de lo numerable. Este es el más comprehensivo, puesto que a él pertenece no solo lo real, no solo lo intuitivo sino todo lo pensable. Las leyes de los números, así, no deberían estar en íntima unión con las del pensamiento? [15].

La reducción logicista de Frege es concebida como el mejor mecanismo teórico para garantizar el rigor y la certeza de las proposiciones de las matemáticas. Con ello se coloca en la tradición de Cauchi, Weierstrass, Dedekind, Cantor, etc., que buscan la solidificación de un edificio teórico cada vez menos vinculado a la intuición. En el logicismo de Frege hay esencialmente una motivación epistemológica. Los resultados de Boole también son integrados en esta visión, solo que el objetivo no es la simbolización y la "matematización" de la lógica, sino la redefinición de la noción de verdad. Los desarrollos en la abstracción de la matemática del siglo XIX empujaron hacia nuevos criterios de verdad en esta disciplina teórica. Las motivaciones de Frege son en gran medida filosóficas. Es posible afirmar que los trabajos de Frege constituyen el primer intento moderno por probar la consistencia de la aritmética; para Frege esto significaba exhibir "objetos" lógicos, objetivos, partícipes de cierta realidad no física. Frege, siguiendo a Leibniz y Boole, construye en su Begriffsschrift un lenguaje simbólico capaz de mejorar el rigor en la expresión matemática, así como acortar las pruebas y "evitar el salto en las deducciones"[16]. Este lenguaje, sin embargo, es un medio para la demostración de su aproximación filosófica a la naturaleza de las matemáticas. Con él contribuyó enormemente en el desarrollo de la lógica moderna.

A través de su Begriffsschrift, Grundlagen y el *Grundgesetze der Arithmetik*, trató de materializar el proyecto de la evidencia lógica en los fundamentos de las matemáticas. La combinación que hace de los elementos teóricos del racionalismo es simple: privilegia la lógica (que es elevada a categoría casi metafísica) y a la vez apuntala el axiomatismo y el platonismo; la intuición es erradicada de la aritmética aunque no de la geometría. Frege no va a romper con el marco conceptual del racionalismo: las verdades a priori infalibles son además referidas a objetos matemáticos que viven en un mundo objetivo no material, independiente del sujeto. La materialización de su aproximación a la naturaleza de las matemáticas en el proyecto logicista (que es tal vez más importante y original que su misma filosofía), encontró en su camino "paradojas" que debilitaron la credibilidad de la filosofía de la evidencia lógica en matemáticas. La paradoja de Russell puso de manifiesto que el axioma V de los Grundgesetze engendraba contradicciones (los intentos fregeanos posteriores de re- formulación del axioma han conducido también a contradicciones). [17]

Russell adoptó también el punto de vista logicista (aunque para toda la matemática) y concentró su atención en la resolución de las paradojas. Inició una nueva etapa en el logicismo que resultó también infructuosa debido a la introducción inevitable en su trabajo de axiomas no lógicos (infinito, elección,...). Frente al fracaso de la filosofía logicista con Frege y Russell, que había parecido corresponder naturalmente al desarrollo abstracto no intuitivo de la matemática moderna, se buscó encontrar otra evidencia (no lógica) en las matemáticas. La vuelta a la filosofía de Kant parecía razonable, pero no se podía hacer directamente sin incidir sobre los resultados matemáticos y lógicos del XIX (geometrías no euclidianas, cuaterniones, clases, etc.).

El intuicionismo asumió como suyas las críticas y reacciones anteriores que se desarrollaron frente al carácter abstracto de las matemáticas. Con Brouwer se estructuró una tradición presente entre los matemáticos decimonónicos: Kr6necker, Baire, etc.

Para el intuicionismo había que volver a una intuición, pero esta vez no espacial y temporal como en Kant. Las proposiciones de la matemática, según ellos, aparecen como el producto de una construcción solo en la intuición temporal.

Es el movimiento que en la mente hace pasar del 1 al 2 lo que determina las matemáticas. La evidencia está en la intuición, por eso las proposiciones de la matemática son sintéticas a priori. Para los intuicionistas no se trata tanto de fundamentar sino de hacer matemáticas. Las paradojas y demás problemas son producto de los abusos y extralimitaciones de lenguaje y la lógica (que son instrumentos accesorios en la construcción matemática) cuando esos han dejado de corresponder a la verdadera matemática.

De la evidencia lógica a la evidencia intuitiva temporal existe un salto epistemológico, pero no una ruptura radical con el racionalismo. Se buscó en el baúl de la tradición racionalista los viejos trastos, se desempolvaron un poco, se añadió un par de naciones, y eso fue todo. El modelo de la mente generadora de verdades a priori infalibles no desaparece. No es exacto, entonces, que los intuicionistas no se preocupan por los fundamentos. Es solo que los buscan en la filosofía de la intuición; una filosofía que además tiene tremendos flancos teóricos: ¿cómo garantizar la intersubjetividad a partir de una intuición subjetiva individual? Con esta filosofía como fundamento intentaron u proyecto centrado en la noción de constructibilidad: la verdad y la existencia en matemáticas coinciden en la posibilidad de la constructibilidad. Ahora bien, ¿cuáles métodos y nociones en ella son admitidos? Las opciones pueden ser muchas, como consecuencia existen, varios intuicionismos.

La evidencia que buscaron los formalistas también la creyeron encontrar en Kant. Para ellos la matemática no es reducible a nociones y principios lógicos, sino que posee objetos que describe, y que están ligados a una percepción interior "en forma de experiencia inmediata y se hallan en la base de todo pensamiento"[18]. La evidencia formalista es el signo. Señala Hilbert en 1922:

> Para mí y en esto me opongo totalmente a Frege y a Dedekind los objetos de la teoría de números son los signos mismos, de los cuales podemos reconocer la forma en toda su generalidad y con toda seguridad, independientemente de las circunstancias de lugar y tiempo, de las condiciones particulares de su presentación y de las diferencias insignificantes que pueden afectar a su trazado. El punto de vista filosófico sólido que considero como indispensable para el fundamento de las matemáticas puras como para cualquier tipo de pensamiento, de comprensión y de comunicación

científicas, se puede resumir de esta forma: en el principio y así nos expresaremos aquí era el signo[19].

Para Hilbert el fracaso del logicismo es el fracaso de los intentos por eliminar las intuiciones y las evidencias previas a los procesos lógicos. No se trata de eliminarlos, se trata de explicar en concreto cuáles son y cómo actúan. La exhibición de estos objetos es, para Hilbert, la base de la posibilidad de la consistencia de las matemáticas. Esta evidencia intuitiva de nuevo tipo hace de las matemáticas proposiciones sintéticas a priori o incluso a posteriori (los signos son objetos físicos).

Los sistemas formales son la pieza de toque de Hilbert en la búsqueda de demostración de la consistencia de las matemáticas. Hilbert inicia un segundo intento por probar la consistencia absoluta de la aritmética. Sus ideas pueden empezar a rastrearse tal vez desde el Congreso Internacional de Matemáticos de 1904 en Heidelberg, en su trabajo "Ueber die Grundlagen der Logik un der Arithmetik". La radicalización de esta visión es la que Curry manifiesta en *Outlines of a formalist philosophy of mathematics*, cuando considera las matemáticas como "la ciencia de los sistemas formales" [20]. Para Hilbert el objeto de la matemática está en los trazos y sus relaciones, para Curry en las fórmulas, los símbolos de estas y sus reglas. En realidad entre Curry y Hilbert no existe una separación radical. La actitud metodológica es la misma. No se trata de buscar el objeto de la matemática por ejemplo en la realidad material propiamente, en ese devenir que fluye independientemente de nosotros, pero que, de diversas formas, y, a partir de nuestros límites, aprehendemos por la vía del pensamiento. En el formalismo el objeto es o los trazos o las fórmulas. En aras de demostrar lo que es una premisa, la posibilidad de la prueba de la consistencia, la verdad, se busca una conexión artificial, inadecuada, con la realidad. El método es erróneo. Confunde la simbolización y manejo de objetos visibles con la matemática propiamente. Las matemáticas tienen como objetos partes de lo real determinadas por una relación material sujeto objeto. Las simbolizaciones son representaciones visuales de las abstracciones hechas por la conciencia de los hombres. Las operaciones de símbolos y trazos matemáticos están determinadas por el objeto de la matemática, por las condiciones más generales de su naturaleza.

El formalismo reduce las matemáticas a la manipulación de símbolos. Sus premisas principales empujan también hacia el convencionalismo en las matemáticas, y a una evidencia, tal vez diferente, la sintáctica. El formalismo rompe con el logicismo, habla de intuición y de objetos de la matemática, pareciera crear, además, la ilusión de que se escapa del paradigma racionalista clásico de las matemáticas, pero vuelve al mismo y lo reafirma en toda su extensión. Su punto de partida es la posibilidad de la demostración de las verdades matemáticas a priori, infalibles: el conocimiento a priori.

En las discusiones más importantes de los fundamentos de la matemática a principios de siglo no se logró escapar del mundo racionalista. Formalistas, intuicionistas y logicistas partían todos de la premisa de que el objeto o el fundamento de la matemática está separado del mundo material. Se enfatizó lenguaje, lógica o intuición en las matemáticas, pero nunca su contenido empírico. A pesar de los dos "desastres" históricos, al decir de Kline (las geometrías no euclidianas y las paradojas), el modelo racionalista seguía sobre sus pies. En las primeras décadas del descrédito de los axiomas no lógicos, el crédito todavía lo tenía el racionalismo de las verdades absolutas e infalibles en matemáticas, cuyos sólidos fundamentos querían demostrar definitivamente todas estas escuelas.

Es necesario señalar que las filosofías de los Fundamentos de las Matemáticas fueron muy pobres; de alguna forma estaban contenidas en la filosofía de los siglos XVII y XVIII. La filosofía formalista no añade tampoco una interpretación muy profunda. Lo más importante de las elaboraciones teóricas de esta época debe mediase en la realización de proyectos concretos de fundamentación. El conjunto de nociones y resultados lógicos y matemáticos que aparece en Grundgesetze, Principia Mathematica, o en las obras de la metamatemática hilbertiana, constituye un extraordinario edificio teórico. Algunos sectores nuevos en las matemáticas y en la lógica tuvieron su motivación en esos trabajos. En cierta medida, es entonces, conveniente separar las visiones filosóficas de los proyectos concretos en la fundamentación. Al mismo tiempo, los resultados, en general adversos, de los proyectos pusieron de manifiesto la necesidad de una renovación epistemológica y filosófica sobre las matemáticas.

En el combate entre racionalismo y empirismo, en el terreno de las ciencias naturales, este último había robado gran terreno al primero. La principal y más evidente racionalidad de las ciencias es la experiencia. Frente a las matemáticas las cosas no estaban tan claras, en general, en el empirismo. La tesis de Mill había sido abandonada, los resultados de la matemática no correspondían a situaciones materiales.

No pudiendo tampoco ser verdades del mundo, todo condujo en esta tradición a hacer de las matemáticas proposiciones tautológicas útiles (Wittgenstein), o simplemente lenguaje separado completamente del mundo. El racionalismo como paradigma sobre el conocimiento en general encontraba su mejor sustento en las matemáticas, frente a esta concepción solo se podía aparentemente oponer otra que reducía estas a convenciones del tipo "tres pies hacen una yarda".

El énfasis en la sintaxis, en la morfología lingüística, abriría una nueva tendencia en la reflexión sobre las matemáticas, y la filosofía en general. El tema y los trabajos de los Fundamentos de la matemática retrotraían las viejas discusiones filosóficas y abría nuevas posibilidades teóricas; con algunos énfasis y algunas nociones modificadas o nuevas todo parecía claramente establecido sobre las fronteras de las principales tradiciones filosóficas, y sobre las principales categorías epistemológicas. Este edificio de supuestos teóricos, de una u otra tradición, empezó a temblar en los siguientes años.

3. Para la historia de la reflexión sobre el conocimiento, la década de los treinta va a ser extraordinariamente importante a partir de los resultados de Gödel en la comprensión de las matemáticas. Las geometrías no euclidianas, los cuaterniones de Hamilton o las n-tuples de Grassmann, en efecto habían generado una convulsión en la visión anterior de las matemáticas. Estos podían no corresponder intuitivamente a la realidad. Todo se concentró en la lógica. Las paradojas demostraron en una nueva convulsión que la certeza lógica no era todo lo que se creía podía ser. Pero en ambas crisis nunca se cuestionó la posibilidad de la fundamentación racional misma, puesto que detrás se asumía como punto filosófico de partida válido un paradigma epistemológico. Tal vez fue Hilbert quién expresó mejor el optimismo racionalista en las primeras décadas del siglo. En 1925 decía: Es también una placentera sorpresa descubrir que, al mismo tiempo, hemos resuelto un problema que ha plagado a los matemáticos por un largo tiempo, viz., el problema de probar la consistencia de los axiomas de la aritmética.[21].

Y concluía entonces: “Lo que hemos experimentado dos veces, una vez con las paradojas del cálculo infinitesimal y otra con las paradojas de la teoría de conjuntos, no será experimentado una tercera vez, nunca jamás” [22].A lo largo de los años veinte Hilbert y sus seguidores siguieron intentando el proyecto de la consistencia absoluta de la aritmética. Algunos resultados fueron publicados por Wilhehn Ackermann en 1924 Von Newman en 1927 y Herbrand en 1930 y 1931. Estos trabajos, que continuaban de hecho los de los logicistas, parecían no dejar duda al éxito del proyecto. Las cosas cambiarían muy pronto.

En un artículo llamado “Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines” de 1931, Gödel destruiría de un plumazo las ilusiones y seguridad de Hilbert, y abrirá un cuestionamiento sobre la reflexión en tomo a la naturaleza de las matemáticas (que aún no ha sido cerrado). En un pequeño resumen de sus resultados, que aparece bajo el título Diskussion zur Grundlegung der Matematik y que fue publicado en 1931, en la revista Erkenntnis, establece Gödel:

> En el trabajo anteriormente citado se muestra que no hay ningún sistema forma] con un número finito de axiomas que sea completo ni siquiera respecto de las sentencias aritméticas. Aquí entendemos por “sentencias aritméticas” aquellas en que no aparecen más que nociones que +, = (adición, multiplicación e identidad, referidas a número naturales), además de los conectores lógicos y los cuantificadores universal y existencial, aplicados solo a variables de números naturales (por lo cual en las sentencias aritméticas no aparecen más variables que las de los números naturales). Incluso para los sistemas formales con un número infinito de axiomas hay sentencias aritméticas indecidibles, con tal de que su esquema axiomático cumpla ciertas condiciones (muy generales). De lo dicho se sigue en todos los sistemas formales conocidos de la matemática —por ejemplo, en Principia Mathematica (con axioma de reducibilidad, de elección y de infinito), en la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel y en la de Von Newmann, y en los sistemas formales de la escuela de Hilbert [23].

Los resultados de Gödel se pueden sintetizar de la siguiente manera. En un sistema formal (adecuado para contener la teoría elemental de números) existe una fórmula indecidible —es decir, que tanto ella como su negación no son demostrables. Como corolario de este teorema de incompletitud, se tiene que la consistencia de este sistema formal no puede ser demostrada dentro del sistema.
Para demostrar estos teoremas Gödel introdujo una aritmetización de la meta-matemática (escogida), hace corresponder los signos primitivos a números naturales:

0	1
S	3
$\sim$	5
V	7
π	9
(	11[24]
)	13

Esta correspondencia se completa así:

> A las variables de tipo n asignamos los números de la forma ϑ^n (donde ϑ es un número primo > 13). Mediante esta asignación a cada fila finita de signos primitivos (y en especial a cada fórmula) corresponde biunívocamente una secuencia finita de números naturales. Ahora asignamos (de nuevo biunívocamente) números naturales a las secuencias finitas de números naturales haciendo, corresponder a la secuencia N1, N2,.. NK el número 2^{N1}, $3^{N2} \ldots \vartheta K^{NK}$, donde denota el ϑK-avo número primero (en orden de magnitud creciente). Así asignaremos biunívocamente número natural no solo a cada signo primitivo, sino también a cada secuencia finita de signos primitivos [25]

Para seguir con la prueba, Gödel debe definir las "funciones recursivas primitivas". Luego prueba que: "Cada relación recursiva primitiva es definible en el sistema P, que de ser expresado con precisión y sin referencia a ninguna interpretación natural de las fórmulas de P, mediante el siguiente teorema:

> Teorema V: Para cada relación recursiva primitiva n-aria R hay un Signo Relacional r (con las variables libres $U_1, U_{2,\ldots,}Un$) tal que para cada n-tuple de números naturales ($X_1, \ldots Xn$) vale: •

• $Rx_{1,\ldots,}\ Xn \longrightarrow Bew(Sb\ (r\ {}^{U}{}_{1\ldots,}Un)_{Z(x_1),\ldots Z(x_n)})$ [26]

• $Rx_{1,\ldots,}Xn \longrightarrow Bew\ (Neg\ Sb\ (r\ {}^{U}{}_{1},\ldots, Un_{Z(x_1),\ldots,Z(x_n)}))$

Ahora define la otra noción clave de W-consistencia así: "Decimos que IC es W-consistente si no hay ningún signo de clase, tal que $\forall$ n ($Sb(a_{z(n)}) \in Flg(K)$) $\therefore$(neg γ gen a)) e Flg(K) donde γ es la variable libre del signo de clase a" [27]

Donde K es una clase de Fórmulas y Flg(K) "el mínimo conjunto de Fórmulas que contiene todas las Fórmulas de K y todos los axiomas y está clausurado respecto a la relación de "inferencia inmediata" [28].

A partir de estas definiciones concluye el decisivo Teorema VI": "Para cada clase recursiva primitiva y W-consistente K de F6rmulas hay un signo de clase r tal que ni y Gen r ni Neg (y Gen r) pertenecen a Fl(K) donde y es la variable libre de r" [29].

Entonces la sentencia indecidible de Gödel tiene la forma y Gen r, donde r es un signo de clase decidible.

En la interpretación de Nagel y Newmann, en *Gödel's Proof*, la fórmula indecidible va a escribirse como (X) "-Dem (x, sub (n,13,n)) " [30] que es un caso particular especial de la fórmula:

> (x) Dem (x, z), que representa dentro de la aritmética, el enunciado metamatemático: la fórmula con número de Gödel Z no es demostrable —o, en otras palabras: no puede representarse ninguna prueba de la fórmula con número de Gödel Z [31].

Una vez que demuestra esto establece una relación de dependencia entre la oración metamatemática "La aritmética es consistente" y la oración indecidible, en los siguientes términos: la primera implica la segunda. Si la primera es demostrable así lo es la segunda. Como la segunda es indecidible entonces la primera es indemostrable.

Las consecuencias de los resultados de G5del son extraordinarias. Por un lado, implican que cualquier formalismo, suficientemente fuerte para expresar partes básicas de la teoría elemental de números, es incompleta. Las matemáticas no admiten entonces una formalización absoluta, y en las partes formalizables no se puede garantizar consistencia. Por otro lado, los métodos finitistas que usaba Hilbert podían ser codificados en una teoría que daba lugar a los mismos resultados. Dice Gödel:

> ...Una demostración de la consistencia de uno de estos sistemas S solo puede llevarse a cabo con ayuda de modos de inferencia que no son formalizables en S. Por tanto, sería completamente imposible obtener una prueba finitaria de consistencia (como buscan los formalistas) para un sistema formal en el que estén formalizados todos los modos finitarios (es decir, intuicionísticamente aceptables) de prueba[32].

Gödel demostró que las pretensiones hilbertianas no podían tener éxito, que la prueba de la consistencia por los métodos hilbertianos no era posible, y más aún, ponía en cuestión los verdaderos límites de los sistemas formales en las matemáticas.

El objetivo de la formalización siempre fue eliminar la intuición, cualquiera que esta fuese, ligada a los procedimientos con los que el hombre se relaciona con las cosas materiales, o ligada a indeterminadas 'intuiciones" subjetivas innatas. Hilbert admitía como premisa la intuición del signo, pero en la formalización radical ya ni esta podía ocupar un lugar. La noción de sistema formal corresponde a la existencia de condiciones deductivas-formales en las teorías matemáticas, a la racionalidad interior de las mismas. En su apuntalamiento se buscaba encontrar el sentido más profundo de la naturaleza de las matemáticas. En esta visión de las cosas, la pareja formalismo-intuición busca devenir solo el primer término, en un sistema cerrado, completo.

Este énfasis es tal vez el más importante en el racionalismo de las matemáticas, su elemento constitutivo más fundamental. Es decir el esquema de que a partir de unas cuantas verdades es posible derivar todas, presente en la filosofía griega, apuntalada a ultranza en la moderna, ha aparecido como el mecanismo epistemológico más coherente y esencial en el modelo de la producción de verdades a priori.

Los resultados de Gödel establecen que la intuición se niega a ser desterrada, hasta en lo que parecía más propio de lo formal. La intuición no puede, entonces, desaparecer, pero esta necesidad obliga a incidir en el esclarecimiento de esta noción, y en un nuevo planteamiento teórico-filosófico sobre el carácter de las teorías matemáticas. Gödel conduce a romper el esquema del sistema absoluto y cenado para todo discurso, conduce a romper la continua pretensión del racionalismo de dar cuenta a partir de la razón de toda la realidad. Ningún sistema racional puede comprender la totalidad de lo real. Esto establece una verdad epistemológica, la recurrencia inevitable a la intuición no es la apelación a la interioridad subjetiva en sí, manifiesta la necesidad del contacto material del sujeto con el objeto material. Las condiciones básicas de la intuición residen en aquellas de lo sensible. Los límites de los sistemas formales son los límites de lo "racional" en el conocimiento, es el reclamo de la práctica empírica, de la vida. Los resultados de Gödel representan (bien entendidos) un duro golpe a la visión racionalista del conocimiento, que había hecho de las matemáticas su reducto principal [33].

Con Gödel los razonamientos en contra de los intentos por la demostración de la consistencia absoluta encuentran un extraordinario asidero teórico. Si la consistencia no es posible de probar esto implica la posibilidad de la existencia de proposiciones p y p' contradictorias. Como una de ellas debe ser falsa, en el sistema axiomático existe una proposición de la que se puede, por la validez de la implicación material, deducir cualquier otra proposición. Esto solo puede abrir paso al caos. Unos años después de los resultados de Gödel, Gentzen en 1936 ("Die Widers pruchs freiheit der reinen Zahlentheorie") probó la consistencia para los enteros y algunas partes del análisis, pero a costa de introducir una inducción transfinita indeseada [34]. Alonso Church en 1936 echó carbón al fuego cuando probó que no es posible en general garantizar "procesos efectivos" en la metamatemática. En 1963 Paul Cohen probó que la hipótesis del continuo y el axioma de escogencia son independientes del sistema axiomático más usado, de Zermelo-Fraenkel; lo que es equivalente a decir que son proposiciones indecidibles. Cualquier opción en torno al uso de estos axiomas es entonces posible, y en cada una, axiomáticas matemáticas diferentes. Para terminar de completar el cuadro "apocalíptico", apareció el teorema de Skolem-Lówenheim, señalando que los axiomas de un sistema no limitan los modelos posibles. Este se trata de más que un corolario de los resultados gódelianos. Señala Kline en Mathematics: The loss of certainty:

> Pero el teorema de Skolem-Löwenheim niega la categoralidad en un sentido más fuerte o de una manera más radical. Establece la existencia de interpretaciones o modelos de un sistema axiomático dado, sin añadir ningún nuevo axioma, son radicalmente diferentes[35].

La crisis que es posible señalar en el racionalismo formalista pone de manifiesto que la matemática no es un cuerpo sólido, seguro, único, absoluto y verdadero, sino que abre la posibilidad, para empezar, de varias matemáticas. La noción clásica de una matemática, en la que se metía en el mismo saco a la geometría, a la aritmética, etc., partía de la estructura axiomática como criterio definitorio de la "unidad". Gödel destruye esto, puesto que ningún sistema formal puede dar cuenta de la estructura de la mayoría de partes de las matemáticas; se requieren varios sistemas formales, y esto no basta aún. Pero, además, por Skolem-Lówenheim, no podemos saber hasta dónde llega cada modelo. Pero hay más, según se acepte o no el axioma de escogencia, o se acepte o no la hipótesis del continuo, por el resultado de Cohen, cada opción nos brinda una estructura axiomática diferente. Una característica central de la matemática moderna es su diversidad. Existen varias matemáticas. En realidad, siempre han existido varios cuerpos teóricos diferentes a los que se les ha asignado el término englobalizador de “matemática”. Esto corresponde a las condiciones del objeto propio de las matemáticas, a la naturaleza última de estas. Esta diversidad esencial, que tiene un origen explicable epistemológicamente, es el sustrato último de la diversidad que ahora aparece a partir de los resultados axiomáticos. No se trata de una característica que nace de la evolución histórica de las matemáticas, se trata de su esencia misma. No se trata tampoco de la visión historicista en la que hablamos de matemáticas diferentes en correspondencia con situaciones históricas distintas, como establece por ejemplo Spengler con sus números “faüsticos” o “apolíneos” [36].Los referentes concretos de las matemáticas son diferentes; esta es la fuente de su diversidad intrínseca.

El teorema de Gödel y los resultados posteriores, a pesar de su golpeteo sobre la visión formalista de las matemáticas, no generaron ni un abandono de la misma ni a la larga un empuje renovador del intuicionismo o del empirismo. Los matemáticos han sacado las lecciones mínimas sobre sus resultados: Lo único que Gödel ponía en cuestión era “un formalismo absoluto”; modelos semi formalistas siguen siendo válidos. El cisma que abre Gödel no ha sido todavía comprendido cabalmente. Se generó un desajuste y un desconcierto formidables con el paradigma racionalista, que ya había sido golpeado con las paradojas, sin embargo, no se hizo y no se ha hecho el salto hacia un nuevo paradigma. Se han apenas añadido unos cuantos epiciclos” al modelo anterior, eso ha sido todo.

El impacto de los resultados gödelianos en el status del racionalismo (bien entendidos) es enorme. Se trata no solo del cuestionamiento del alcance de los sistemas formales, sino de los alcances de la razón. Las discusiones hasta Gödel de los fundamentos de la matemática no habían salido en realidad del marco clásico del racionalismo. Las intuiciones del formalismo y del intuicionismo no dejaban de ser subjetivas y a priori, desconectadas de una relación empírica auténtica. La respuesta a la crisis” gödeliana no supone apenas un pequeño reajuste dentro de una línea de interpretación teórica; implica, si se entiende adecuadamente, la necesidad de una interpretación epistemológica radicalmente diferente al paradigma dominante, una revolución en la filosofía de las matemáticas. Ya no es posible afirmar que los teoremas de las matemáticas son verdaderos en el mundo real y que estas verdades infalibles son simplemente accesibles al pensamiento humano. El replanteo teórico es necesario. No es raro, entonces, que Lakatos insista aunque un poco optimistamente (desde la década de los 60) en un “renacimiento del empirismo en la reciente filosofía de la matemática”[37].

El paradigma de la inyección de verdad de la cúspide hacia la base hizo aguas con los resultados gödealianos. Los intentos, que Lakatos llama “euclidianos”, por asir a su esquema la naturaleza de las matemáticas han fracasado. Hasta qué punto la crisis del racionalismo ha fortalecido o va a fortalecer la tradición empirista es un misterio. Ni la visión de Mill, que hace de las verdades matemáticas leyes inductivas, ni la visión sintáctica convencionalista del empirismo lógico, frente al racionalismo puro parecen ser alternativas muy atractivas.

El esclarecimiento sobre la naturaleza de las matemáticas es un problema epistemológico de primera magnitud. Los resultados que inicia Gödel obligan a un replanteo de las nociones clásicas de la epistemología. Las divisiones analítico-sintéticas, a priori-a posteriori, así como la dicotomía entre las tradiciones racionalista y empirista, no son suficientes para dar cuenta de la estructura del conocimiento. Una nueva esfera de categorías, métodos y principios teóricos debe ser encontrada. Ni los énfasis unilaterales en el objeto o en el sujeto epistémológicos, ni una dialéctica trivial, pueden ayudar a hacer entrar la luz. La comprensión de que esta revolución teórica es necesaria no es un problema meramente literario o metafísico. Los paradigmas aceptados sobre la naturaleza de las matemáticas han condicionado la forma y los contenidos del desarrollo de las mismas. Y no solo eso. La concepción predominante sobre las matemáticas así como su propia evolución han influido extraordinariamente en el decurso del conjunto de las ciencias (de una u otra forma).

Los resultados gödelianos han creado las condiciones para una "ruptura epistemológica" esencial en la historia del conocimiento humano. Que esta posibilidad vaya a tomar realidad, adquirir un rostro y un cuerpo teóricos superiores dependerá de muchos factores. Es una tarea que en la filosofía y las ciencias tenemos por delante.

Notas

---

1 Cf. Brunschvicg L. (1981). *Les étapes de la Phílosophie Mathématique.* Paris: A. Blanchard. pp.l06.

2 *Ibiclp.114.*

3 Descartes, R. (1968). *Meditaciones Metafísicas.* Trad. 'usad *García* Mocente. Madrid: Espasa Calpe, , l29.

4 *Idem.*

5 Körner, S. *Introducción a la Filosofía de la temática.* Trad. Carlos Gerhard. México: Siglo XXI, 969, pp23.

6 Cfr. Beth, Evert W.Piaget, *Jean . (1980) Epistemología matemática y psicología.* Trad. Víctor Sánchez de Zavala. España: Editorial *Crítica,* pp.24 *y 25.* Mientras que para Descartes la intuición es de un tipo racional espiritual, para Kant es espacio-temporal, una referencia de una u otra forma ms vinculada al mundo material (aunque sin llegar a él). De hecho es la definición de una intuición en la que la influencia del empirismo británico no se escapa.

7 Cfr. Caveing, M. (1974). *El proyecto racional de las ciencias contemporáneas en Epistemología y Marxismo.* Barcelona: Ecl. Martínez Roca, pp.33.

8 Kant, Manuel. (1973). *Crítica de la Razón pura.* Trad. José del Perojo. Buenos Aires: Losada, pp.147.

9 *Ídem.*

10 *Ibid, p.148.*

11 *Ibid, p*p.l62,I63

12 *lbid, p*p.l65.

13 *Ibid, pp.l57.*

14 Frege, Gottlob. Es en el libro de 1884: *Los fundamentos de la aritmética* incluido en *Conceptografía.* Trad. Hugo Padilla. México: UNAM, 1972, pp. 117.

15 *Ibid, p*p.l30.

16 *Ibid, pp.194.*

17 Cf. Quine W.V.O. "On Frege's Way out" en Klemke, Ed (edit). (1968). *Essays on Frege.* Illinois: University of Illinois Press, pp.492.

18 K8rner. *op. cit., p*p.88.

19 Hilbert, David en Ladrire, Jean. (1969). *Limitaciones internas de los formal ismos.* Trad. José Blasco. Madrid: Tecnos, pp.27.

20 Curry, Haskell. (1970). *Outlines of a formalist philosophy of mathematics.* Amsterdam: North-Holland, pp.56.

21 Hilbert, David. "On the infinite" en Putnam, Benacerraf, H. y Paul (edit). (1964). *Philosophy of Mathematics. Selected Readings.* New Jersey: Prentice Hall, pp.149.

22 Ibid, pp.150.

23 Gödel, Kurt. (1981). *Obras completas.* Trad. Jesús Mosterrín. Madrid: Alianza, pp.99.

24 *Ibid.* pp.53.

25 *Idem.*

[26] *Ibid.* pp.73. Bew K quiere decir que K es una fórmula decidible.
[27] *Ibid.* pp.74. X Gen y es la *generalización* de y respecto a La variable X (suponiendo que X sea variable).
[28] *Idem.*
[29] *Idem.*
[30] Nagel, E. y Newman, J. (1959). *La prueba de G5- del.* Trad. Ramón Xirau. México: UNA, pp.64.
[31] *Ibid. p*p.63.
[32] Ibid, pp.100.
[33] A partir de los resultados de G6del se despertó un nuevo interés por los temas que abordaba, y se desarrolló un nuevo terreno en la lógica y la matemática, J.B. Rosser en "Extensions of Sorne Theorerns of Gödel and Church" reemplazó la suposición de la w-consistencia por la simple consistencia. Hilbert y Bernays realizaron otros intentos. En las notas de Gödel recogidas por Kleene y Rosser para publicación se define la importante noción de *función recursiva.* Poco después Kleene publica su "General Recursive Functions óf Natural Numbers". Church publica su famoso resultado en 1936 y en 1937 Turing da una visión ms general de sistema formal en "On Computable Numbers, With an Aplication to the Entscheidungs problem". A. Tarski en *Undecidable Theories* establece una aproximación muy desarrollada de la no decidibilidad en los sistemas formales.
[34] Otras pruebas de consistencia de la aritmética fueron hechas por Ackermann en 1940, P.S. Novikov en 1943, Lorentzen en 1951 y el mismo Gödel en 1958. Estas (y otras ms que se presentaron) envolvían algo mis que propiedades perceptuales (anschauliche) de combinaciones simbólicas. El reduccionismo no encontraba salida.
[35] Kline, Morris. *Mathematics: The Loss of Certainty.* New-York: Oxford University Press, 1980, pp.272. Es necesario recordar que ya el teorema de Gödel implicaba la existencia de modelos no standard (diferentes no isomórficos) de la aritmética a partir de la escogencia de las proposiciones indecidibles. S—L implica una profundización mayor de esta diversidad.
[36] Cf. Spengler, O. (1958). *La decadencia de Occidente* Trad. Manuel García Morente. Madrid: Espasa-Calpe, 1958, pp.88 y ss.
[37] Cf. Lakatos, Imre. (1981). En el artículo "¿Existe un renacimiento del empirismo en la reciente filosofía de la matemática?" en el libro *Matemáticas Ciencia y Epistemología.* Madrid: Alianza, pp.42 y ss.